



Analysis

Übungsblatt 13

SS 2020

Aufgabe 1 (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

Eine Gleichung der Form

$$F(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0$$

in den Ableitungen einer unbekanntenen Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto u(x)$, bis zur Ordnung $n \in \mathbb{N}$, heißt *gewöhnliche Differentialgleichung (GDGL) n-ter Ordnung*. Versuchen Sie doch mal, die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(x) - 2xu'(x) + 2\lambda u(x) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

zu lösen. Das ist die sog. *Hermitesche Differentialgleichung*. Verwenden Sie hierzu den *Potenzreihenansatz*

$$u(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Sie brauchen nicht zu zeigen, daß der Konvergenzradius größer als 0 ist!

Aufgabe 2 (Uneigentliche Integrale)

Existiert das folgende uneigentliche Integral? Wenn ja, berechnen Sie seinen Wert!

$$\int_1^{\infty} x e^{-2x} dx$$

Aufgabe 3 (Gradient und Richtungsableitung)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := \sin \left(x^2 + \log \left(\frac{x}{y} \right) \right)$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, 1)$ in Richtung der Winkelhalbierenden der xy -Ebene!

Aufgabe 4 (Lokale Extrema und Sattelpunkte im \mathbb{R}^N)

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := -x^2y + 6xy - xy^2$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte!

Aufgabe 5* (Uneigentliche Integrale)

Existiert das folgende uneigentliche Integral? Wenn ja, berechnen Sie seinen Wert!

$$\int_2^{\infty} \frac{4(x-2)}{x(x^2-4)} dx$$

Aufgabe 6* (Differentialrechnung im \mathbb{R}^N)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := x^3 - 2x^2y^2 + y^4 + 10$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(0, 1)$ in Richtung des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) Untersuchen Sie f auf Sattelpunkte und lokale Extrema!

Aufgabe 7* (Differentialrechnung im \mathbb{R}^N)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := (x^2 + y^2)e^{xy}$$

- (a) Bestimmen Sie $\nabla f(x, y)$.
- (b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, 1)$ in Richtung des Vektors $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (c) Untersuchen Sie f auf Sattelpunkte und lokale Extrema!