Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis

Übungsblatt 12

SS 2019, KW 26: Mo, 24. Juni – Do, 27. Juni

– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Taylorentwicklung)

Approximieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \log(1 + ax),\ a \in \mathbb{R},$$

eine Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$, und berechnen Sie deren Konvergenzradius in Abhängigkeit von a!

Musterlösung:

Es gilt:

$$f'(x) = \frac{a}{1+ax}$$
$$f''(x) = \frac{-a^2}{(1+ax)^2}$$
$$f'''(x) = \frac{2a^3}{(1+ax)^3}$$
$$f^{(iv)}(x) = \frac{-6a^4}{(1+ax)^4}$$

und somit

$$f(1) = \log(1 + a)$$
$$f'(1) = \frac{a}{1+a}$$
$$f''(1) = \frac{-a^2}{(1+a)^2}$$
$$f'''(1) = \frac{2a^3}{(1+a)^3}$$
$$f^{(iv)}(1) = \frac{-6a^4}{(1+a)^4}$$

Also folgt allgemein

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}(k-1)!\frac{a^k}{(1+a)^k}$$

Für die Taylorreihe ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} T_f(x) &= \log(1+a) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(k-1)!\frac{a^k}{(1+a)^k}\frac{(x-1)^k}{k!} \\ &= \log(1+a) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k\frac{(x-1)^k}{k} \end{aligned}$$

Für den Konvergenzradius R der Taylorreihe gilt:

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k}{(-1)^{k+2}\frac{1}{k+1}\left(\frac{a}{1+a}\right)^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}\cdot\left|\frac{1+a}{a}\right| = \left|\frac{1+a}{a}\right|$$

Aufgabe 2 (Integrale geometrisch)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale nur geometrisch, d.h. ohne Bildung einer Stammfunktion!

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x+1\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

Musterlösung:

(a) Die Gerade $g(x) := x+1$ bildet auf dem Intervall $[-1,3]$ mit der x-Achse ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Flächeninhalt durch

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot g(3) = 2\cdot 4 = 8 = \int_{-1}^{3} x+1\,dx$$

gegeben ist.

(b) Das Integral ist gleich der Fläche des Halbkreises oberhalb der x-Achse mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 2. Es gilt also

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2 = 2\pi$$

Aufgabe 3 (Integrale)

(i) Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a)

$$\int 4x^3 + 3x + 1 + \frac{6}{x} + 5 \cdot \sqrt[4]{x}\, dx$$

(b)

$$\int \log(x^2)\, dx$$

(c)

$$\int \frac{\cos(x)}{3 + 4\sin(x)}\, dx$$

(ii) Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(d)

$$\int_0^2 9x^2 + 6x + 2\, dx$$

(e)

$$\int_0^1 (6x+5)e^{3x^2+5x}\, dx$$

(f)

$$\int_6^{11} \frac{1}{x^2 - 2x - 15}\, dx$$

(g)

$$\int_0^1 e^x(x^2 + 3x)\, dx$$

Musterlösung:

(i)

(a)

$$\int 4x^3 + 3x + 1 + \frac{6}{x} + 5 \cdot \sqrt[4]{x}\, dx = x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x + 6\log(|x|) + 4x\sqrt[4]{x} + c$$

(b)

$$\int \log(x^2)\, dx = 2\int \log(x)\, dx = 2x(\log(x) - 1) + c$$

(c) Substituiere $z := \sin(x)$. Dann gilt $\frac{dz}{dx} = \cos(x)$ und somit $dx = \frac{dz}{\cos(x)}$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos(x)}{3+4\sin(x)}\,dx &= \int \frac{\cos(x)}{3+4z}\frac{dz}{\cos(x)} = \int \frac{dz}{3+4z} \\
&= \frac{1}{4}\log(|3+4z|) = \frac{1}{4}\log(|3+4\sin(x)|) + c
\end{aligned}$$

(ii)

(d)

$$\int_0^2 9x^2 + 6x + 2\,dx = 3x^3 + 3x^2 + 2x\Big|_0^2 = 24 + 12 + 4 - 0 = 40$$

(e) Substituiere $z(x) := 3x^2 + 5x$. Dann gilt $\frac{dz}{dx} = 6x + 5 \;\Leftrightarrow\; dx = \frac{dz}{6x+5}$ sowie $z(0) = 0$ und $z(1) = 8$. Somit gilt

$$\int_0^1 (6x+5)e^{3x^2+5x}\,dx = \int_0^8 (6x+5)e^z \frac{dz}{6x+5} = \int_0^8 e^z\,dz = e^z\big|_0^8 = e^8 - 1$$

(f) Wegen $x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5)$ liefert Partialbruchzerlegung $(A, B \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\int_6^{11} \frac{1}{x^2-2x-15}\,dx &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x+3)}{(x+3)(x-5)} \\
&= \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15}
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das LGS

$$\begin{aligned}
A + B &= 0 \\
-5A + 3B &= 1
\end{aligned}$$

mit der Lösung $A = -\frac{1}{8} \;\wedge\; B = \frac{1}{8}$. Also folgt

$$\begin{aligned}
\int_6^{11} \frac{1}{x^2-2x-15}\,dx &= \int_6^{11} \frac{-\frac{1}{8}}{x+3} + \frac{\frac{1}{8}}{x-5} = -\frac{1}{8}\log(|x+3|)\big|_6^{11} + \frac{1}{8}\log(|x-5|)\big|_6^{11} \\
&= -\frac{1}{8}(\log(14) - \log(9)) + \frac{1}{8}(\log(6) - 0) \\
&= \frac{1}{8}(\log(6) - \log(14) + \log(9)) = \frac{1}{8}(3\log(3) - \log(7))
\end{aligned}$$

(g) Zweimal partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x(x^2+3x)\,dx &= e^x(x^2+3x)\big|_0^1 - \int_0^1 e^x(2x+3)\,dx \\
&= 4e - \left(e^x(2x+3)\big|_0^1 - \int_0^1 2e^x\,dx\right) = 4e - \left(5e - 3 - 2\,e^x\big|_0^1\right) \\
&= 4e - (5e - 3 - 2(e-1)) = e + 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 4* (Integrale)

(i) Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a)

$$\int 2x^7 - 4x^4 + 6 - \frac{5}{x^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}\, dx$$

(b)

$$\int x^2 \log(x)\, dx$$

(c)

$$\int \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3(x-2)}\, dx$$

(ii) Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(d)

$$\int_1^e \log^2(x)\, dx$$

(e)

$$\int_0^\pi \sin(x)\sin(\cos(x))\, dx$$

(f)

$$\int_0^1 e^x \sinh(x)\, dx$$