Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 11
SS 2020
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Lokale Extrema und Konvexität)

Wir betrachten die Funktion $f : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^2 + \sqrt{2 - x^2}$$

(i) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

(ii) Wo ist die Funktion konvex bzw. konkav? Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

Musterlösung:

(i)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x - \frac{2x}{2\sqrt{2-x^2}} = 2x - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \\
f''(x) &= 2 - \frac{\sqrt{2-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{2-x^2}}}{2-x^2} = 2 - \frac{2-x^2+x^2}{\sqrt{(2-x^2)^3}} \\
&= 2 - \frac{2}{\sqrt{(2-x^2)^3}}
\end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
& f''(x) \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2 \geq \frac{2}{\sqrt{(2-x^2)^3}} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 \geq \frac{1}{\sqrt{(2-x^2)^3}} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 \leq \sqrt{(2-x^2)^3} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 \leq (2-x^2)^3 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 \leq 2-x^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 \leq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x \leq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x \in [-1,1]
\end{aligned}$$

Da $[-1,1] \subseteq D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, ist f auf dem Intervall $[-1,1]$ konvex und für $-\sqrt{2} \leq x \leq -1$ und $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ konkav.
Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
& f'(x) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \\
\Leftrightarrow \quad & 4x^2 = \frac{x^2}{2-x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & (2-x^2)4x^2 = x^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2(1-4(2-x^2)) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2(4x^2-7) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \ \vee \ x = \sqrt{\frac{7}{4}} \ \vee \ x = -\sqrt{\frac{7}{4}}
\end{aligned}$$

Alle Nullstellen der 1. Ableitung liegen im Definitionsbereich von f, sind somit Kandidaten für lokale Extrema. Wegen

$$\begin{aligned}
f''(0) &= 2 - \frac{2}{\sqrt{8}} > 0 \\
f''\left(\pm\sqrt{\frac{7}{4}}\right) &= 2 - \frac{2}{\sqrt{\left(2-\frac{7}{4}\right)^3}} = 2 - \frac{2}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} < 0
\end{aligned}$$

liegt bei $x = 0$ ein lokales Minimum und bei $x = \sqrt{\frac{7}{4}}$ sowie bei $x = -\sqrt{\frac{7}{4}}$ jeweils ein lokales Maximum vor.

Aufgabe 2 (Konvexität und Ungleichungen)

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x\log(x)$ streng konvex ist.

(b) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$(a+b)\log(a+b) \leq a\log(2a) + b\log(2b)$$

Musterlösung:

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x\log(x)$ streng konvex ist.

(b) Zeigen Sie: Fr alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt: $(a+b)\log(a+b) \leq a\log(2a)+b\log(2b)$.

Lösung:

(a) Der Definitionsbereich von $f(x)$ ist $\mathbb{R}_+$ (also die positiven reellen Zahlen). Wir bilden die zweite Ableitung.

$$\begin{aligned}
& f(x) = x\log(x) \\
\Rightarrow & f'(x) = \log(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \log(x) + 1 \\
\Rightarrow & f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ für } x > 0.
\end{aligned}$$

Damit ist $f(x)$ auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$ streng konvex.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Wir wählen $\lambda = \frac{1}{2}$. Aus der Konvexität von $f(x)$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \\
\Rightarrow \quad & \frac{a+b}{2} \cdot \log\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{a\log(a)+b\log(b)}{2} \\
\Rightarrow \quad & (a+b)\log\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq a\log(a) + b\log(b) \\
\Rightarrow \quad & (a+b)\left(\log(a+b) - \log(2)\right) \leq a\log(a) + b\log(b) \\
\Rightarrow \quad & (a+b)\log(a+b) - (a+b)\log(2) \leq a\log(a) + b\log(b) \\
\Rightarrow \quad & (a+b)\log(a+b) \leq a\log(a) + a\log(2) + b\log(b) + b\log(2) \\
\Rightarrow \quad & (a+b)\log(a+b) \leq a\left(\log(a) + \log(2)\right) + b\left(\log(b) + \log(2)\right) \\
\Rightarrow \quad & (a+b)\log(a+b) \leq a\log(2a) + b\log(2b).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Bestimmen Sie die Stelle, an der die Tangente an die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ dieselbe Steigung wie die Sekante durch die Punkte $A(-1,-1)$ und $B(1,1)$ hat!

Musterlösung:

f ist als Polynom differenzierbar, und für die Sekantensteigung gilt

$$m = \frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $\xi \in [-1,1]$ mit

$$f'(\xi) = 1$$

also $3\xi^2 = 1$, was der Fall ist für $\xi = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Aufgabe 4 (Regel von de l'Hospital)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x-1)^2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}$

Musterlösung:

(i) Es liegt der Fall $\frac{\infty}{\infty}$ vor. Also ist die Regel von de l'Hospital anwendbar:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x-1)^2} &= \left(\frac{\infty}{\infty} =\right) \lim_{x\to\infty} \frac{2xe^x + x^2 e^x}{2(e^x-1)e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + x^2}{2(e^x-1)} \\ &= \left(\frac{\infty}{\infty} =\right) \lim_{x\to\infty} \frac{2+2x}{2e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{e^x}\end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x}{e^x} = 0$. Wenn man das nicht weiß, kann man auch nochmal l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} =\right) \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Also folgt insgesamt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x-1)^2} = 0$$

(ii) Es gilt $x^x = \left(e^{\log(x)}\right)^x = e^{x\log(x)}$ und somit nach der Regel von de l'Hospital sowie Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} &= \left(\frac{0}{0} =\right) \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\log(x)+1) - 1}{-1+\frac{1}{x}} \\
&= \left(\frac{0}{0} =\right) \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\log(x)+1)^2 + x^x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{-1} = -2
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Newton-Verfahren)

Das Newton-Verfahren ist ein Verfahren zur approximativen (numerischen) Berechnung von Nullstellen von differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ebenso wie das Heron-Verfahren zur Wurzelbestimmung. Es liefert ebenfalls quadratische Konvergenz, allerdings ist es äußerst startwertabhängig, d.h. nicht jede Wahl eines Startwerts führt zwangsläufig zum Ziel.

a) Gehen Sie von einem Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ aus, und bestimmen Sie die Nullstelle der Tangente an f im Punkt $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$. Dies ist die neue Iteration $x^{(1)}$ des Newton-Verfahrens. Formulieren Sie daraus eine allgemeine Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren!

b) Beschreiben Sie ein Newton-Verfahren zur approximativen Bestimmung von π!

c) Schreiben Sie ein Computerprogramm zur Nullstellenberechnung mithilfe des Newton-Verfahrens. Verwenden Sie als Toleranz $\tau = 10^{-12}$. Testen Sie Ihr Programm anhand der Funktion

$$f(x) = \sin(x) - 0.5x - 0.1$$

mit den Startwerten $x^{(0)} \in \{0.1, 1, 1000\}$. Konvergiert das Newton-Verfahren? Wenn ja, verifizieren Sie die quadratische Konvergenz!

Musterlösung:

a) Da f differenzierbar ist, hat die Tangente $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Steigung $f'(x^{(0)})$ im Punkt $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$. Da sie durch den Punkt $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$ gehen muß, lautet ihre Gleichung:

$$t(x) = f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})$$

Für die Nullstelle $x^{(1)}$ von f folgt dann:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

Es ergibt sich die allgemeine iterative Vorschrift des Newton-Verfahrens als

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \; k \in \mathbb{N}_0.$$

Es muß stets $f'(x^{(k)}) \neq 0$ gelten, das Verfahren darf also keinen stationären Punkt erwischen.

b) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sin(x)$. Diese hat π als Nullstelle. Ein Newton-Verfahren zur approximativen Bestimmung von π lautet somit

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\sin(x^{(k)})}{\cos(x^{(k)})}, \; k \in \mathbb{N}_0$$

Da sin auf dem Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ streng monoton fallend ist, wird der Startwert $x^{(0)} := 3$ auf jeden Fall zur Konvergenz führen, denn im rechten Teil des Intervalls ist auch der Kosinus weit genug von der Null weg.

c) Ein *python*-Programm ist in der beigefügten Datei `newton.py` implementiert. Im Falle von $x^{(0)} = 0.1$ ist die Toleranz bereits nach zwei Iterationen unterschritten. Das Verfahren konvergiert gegen die Nullstelle $x^* \approx 0.202773441916$. Die Fehler $|x^{(k)} - x^{(0)}|$ ergeben sich als

```
0.102773441916
0.00142766167394
4.25772400892e-07
```

Die Anzahl an Nullen hinter dem Komma verdoppelt sich mindestens nach jeder Iteration, also kann quadratische Konvergenz verifiziert werden.
Im Falle von $x^{(0)} = 1$ divergiert das Newton-Verfahren, im Falle von $x^{(0)} = 2$ konvergiert es gegen eine andere Nullstelle. Die quadratische Konvergenz ist jedoch auch hier wieder zu beobachten.
Im Falle von $x^{(0)} = 1000$ braucht das Newton-Verfahren sehr lange zur Konvergenz, es scheint zunächst zu divergieren, bis es dann doch irgendwann in den Einzugsbereich der Nullstelle gelangt.

Aufgabe 10* (Anwendungen der Ableitung in der Geometrie)

Berechnen Sie die Stelle, an der die Tangenten von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ parallel sind!

Musterlösung:

Für die Stelle x_0, an der die beiden Tangenten parallel verlaufen, muß gelten:

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

Wegen $f'(x_0) = 1$ und $g'(x_0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2-6x}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}}$, muß also gelten:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3x_0^2 - 6x_0}{\sqrt[3]{(x_0^3 - 3x_0^2)^2}} \\
\Leftrightarrow\ 3 \cdot \sqrt[3]{(x_0^3 - 3x_0^2)^2} &= 3x_0^2 - 6x_0 \\
\Leftrightarrow\ \sqrt[3]{(x_0^3 - 3x_0^2)^2} &= x_0^2 - 2x_0 \\
\Leftrightarrow\ x_0^6 - 6x_0^5 + 9x_0^4 &= x_0^6 - 6x_0^5 + 12x_0^4 - 8x_0^3 \\
\Leftrightarrow\ 3x_0^4 - 8x_0^3 &= 0 \\
\Leftrightarrow\ 3x_0^3(x_0 - 8) &= 0 \\
\Leftrightarrow\ x_0 &= 0 \ \vee\ x_0 = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Da g in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist, bleibt nur $x_0 = \frac{8}{3}$ als Lösung.