Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 10
SS 2020
–Musterlösungen–

Aufgabe 1 (Anwendung der Exponentialfunktion)

Wachstums- und Zerfallsprozesse können allgemein durch eine zeitabhängige Funktion

$$f(t) = f(0) \cdot a^t$$

dargestellt werden ($t \geq 0$). Falls $a > 1$, so handelt es sich um einen Wachstums- und falls $a < 1$ um einen Zerfallsprozeß.
Bei einem schlecht gezapften Glas Kölsch beträgt die Schaumhöhe anfangs 5 cm. Um das Kölsch einigermaßen genießen zu können, wartet man eine gewisse Zeit. Nach 3 Minuten ist die Schaumhöhe auf die Hälfte zurückgegangen. Stellen Sie eine Gleichung auf, welche den Schaumzerfall beschreibt. Wie hoch stand der Schaum zu Anfang, wenn nach 3 Minuten die Schaumhöhe 3 cm beträgt? Nach wie vielen Minuten ist der Schaum auf 1 cm gesunken?

Musterlösung:

Sei $f(t)$ die nach t Minuten noch vorhandene Schaumhöhe. Dann läßt sich der Zerfallsprozeß beschreiben durch die Gleichung

$$f(t) = f(0) \cdot q^t$$

wobei $0 < q < 1$. Dabei ist der Anfangwert $f(0) = 5$, also:

$$f(t) = 5 \cdot q^t$$

Da nach 3 Minuten nur noch die Hälfte an Schaum vorhanden ist, muß gelten:

$$2.5 = 5 \cdot q^3 \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Also lautet die Zerfallsgleichung:

$$f(t) = 5 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right)^t$$

Falls nach 3 Minuten die Schaumhöhe 3 cm betrug, muß gelten:

$$3 = f(0) \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right)^3 = \frac{1}{2}$$

also $f(0) = 6$ cm.
Weiterhin gilt

$$1 = f(0) \cdot q^t \Leftrightarrow t = \log_q \frac{1}{f(0)} = \frac{\log \frac{1}{f(0)}}{\log(q)} \approx 7$$

Nach ca. 7 Minuten ist also der Schaum auf 1 cm gesunken.

Aufgabe 2 (Logarithmus)

Lösen Sie die folgenden Potenzen- bzw. Logarithmengleichungssysteme in $\mathbb{R}$:

a) $x - y = 1$, $2^x \cdot 3^y = 432$

b) $\lg(x) + \lg(y) = 1,\ \lg(x) - \lg(y) = \lg\left(\frac{5}{2}\right)$

Musterlösung:

a) Aufgrund von $x - y = 1$ gilt $x = y + 1$ und somit

$$2^x \cdot 3^y \quad = \quad 2^{y+1} \cdot 3^y = 2 \cdot 2^y \cdot 3^y = 2 \cdot (2 \cdot 3)^y = 2 \cdot 6^y = 432$$

und somit $y = \log_6(216) = 3$ und $x = 3 + 1 = 4$.

b) Wegen

$$\lg(x) + \lg(y) = \lg(xy) = 1$$

folgt $xy = 10$, und wegen

$$\lg(x) - \lg(y) = \lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg\left(\frac{5}{2}\right)$$

folgt $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$ und somit $x = \frac{5}{2}y$. Wegen $xy = 10$ folgt sofort $\frac{5}{2}y^2 = 10$ und somit $y = 2 \vee\ y = -2$. Damit ist $x = 5 \vee x = -5$. Allerdings sind aufgrund der Logarithmusterme negative Werte für x und y ausgeschlossen, so daß $x = 2, y = 5$ die einzige Lösung ist.

Aufgabe 3 (Differenzenquotient)

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x^2 - 1|$ mithilfe des Differenzenquotienten auf Differenzierbarkeit!

Musterlösung:

Es gilt $x^2 - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$ sowie $x^2 - 1 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-1, 1)$. Also ist im ersten Fall $f(x) = x^2 - 1$ und im zweiten Fall $f(x) = 1 - x^2$, also jeweils ein Polynom und daher differenzierbar. Es bleiben die Stellen $x_0 = 1$ und $x_0 = -1$ zu untersuchen. Wegen

$$\begin{aligned} & \lim_{x\searrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\searrow 1} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x\searrow 1} x + 1 = 2 \\ \neq \quad & \lim_{x\nearrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\nearrow 1} \frac{1 - x^2 - 0}{x - 1} = \lim_{x\nearrow 1} -(x + 1) = -2 \end{aligned}$$

stimmen links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 1$ nicht überein, und damit ist f an dieser Stelle nicht differenzierbar. Wegen

$$\begin{aligned} & \lim_{x\nearrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x\nearrow -1} \frac{x^2 - 1 - 0}{x + 1} = \lim_{x\nearrow -1} x - 1 = -2 \\ \neq \quad & \lim_{x\searrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x\searrow -1} \frac{1 - x^2 - 0}{x + 1} = \lim_{x\searrow -1} 1 - x = 2 \end{aligned}$$

stimmen links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = -1$ nicht überein, und damit ist f an dieser Stelle nicht differenzierbar.

Aufgabe 4 (Ableitungen)

Bestimmen Sie jeweils die 1. Ableitung:

(i) $f(x) = \frac{7}{3}x^5 - 8x + 3\sqrt{x}$

(ii) $f(x) = 7x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \pi + 5\sqrt[7]{x^5}$

(iii) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[5]{x^4}}$

(iv) $f(x) = 7x^3 \cdot x^x$

(v) $f(x) = 9x^2 \cdot \cos(x) + \cosh(x)$

(vi) $f(x) = \log(x^2) \cdot e^x$

(vii) $f(x) = \frac{1}{1+2\sqrt{x}}$

(viii) $f(x) = \frac{1+x^2}{\sin(x)}$

(ix) $f(x) = \sqrt[8]{(7x^2 - 9x)^3}$

Musterlösung:

(i) $f'(x) = \frac{35}{3}x^4 - 8 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

(ii) $f'(x) = 28x^3 - x + \frac{25}{7\sqrt[7]{x^2}}$

(iii) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{5x\sqrt[5]{x^4}}$

(iv) $f'(x) = 7x^3(x^x(\log(x)+1)) + 21x^2x^x = 7x^{x+3}(\log(x)+1) + 21x^{x+2}$

(v) $f'(x) = 18x\cos(x) - 9x^2\sin(x) + \sinh(x)$

(vi) $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2xe^x + \log(x^2)e^x = e^x\left(\frac{2}{x} + \log(x^2)\right) = 2e^x\left(\frac{1}{x} + \log(x)\right)$

(vii) $f'(x) = -\frac{1}{(1+2\sqrt{x})^2} \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})^2}$

(viii) $f'(x) = \frac{2x\sin(x)+\cos(x)(1+x^2)}{\sin^2(x)}$

(ix) $f'(x) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{(7x^2-9x)^5}} \cdot (14x-9) = \frac{42x-27}{8\sqrt[8]{(7x^2-9x)^5}}$