Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis

Klausur Sommersemester 2019

18. September 2019

Musterlösungen

Aufgabe 1 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-5n^5 + 2n^3 - 4n^2 + n^6 + 1}{7n^6 + n - 5n^3 + n^2 - \pi}$$

(b)

$$\limsup_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{x + \sin(x)}$$

(d)

$$\lim_{x\nearrow 1} \frac{\sqrt{x}}{\log(2x-1)}$$

Musterlösung:

(a) Es gilt

$$\frac{-5n^5 + 2n^3 - 4n^2 + n^6 + 1}{7n^6 + n - 5n^3 + n^2 - \pi} = \frac{-\frac{5}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^4} + 1 + \frac{1}{n^6}}{7 + \frac{1}{n^5} - \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^4} - \frac{\pi}{n^6}} \to \frac{-0 + 0 - 0 + 1 + 0}{7 + 0 - 0 + 0 - 0} = \frac{1}{7}$$

(b) Da die Folge $\frac{n}{n+1}$ gegen 1 konvergiert, besitzt die Folge $(-1)^n \frac{n}{n+1}$ die beiden Häufungspunkte 1 und -1. Da der Limes superior der größte Häufungspunkt ist, gilt

$$\limsup_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} = 1$$

(c) Verwende die Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{x + \sin(x)} \left(\frac{0}{0} =\right) \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1+0}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(d) Da die Wurzelfunktion auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und die Logarithmusfunktion auf $\mathbb{R}_+$ stetig ist, folgt wegen

$$\lim_{x\nearrow 1} \sqrt{x} = 1$$
$$\lim_{x\nearrow 1} \log(2x-1) = 0$$

und daher, da $x < 1$, insgesamt:

$$\lim_{x\nearrow 1} \frac{\sqrt{x}}{\log(2x-1)} = -\infty$$

Aufgabe 2 (3+2+2+3=10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie jeweils an, welches Kriterium Sie verwenden!

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

(b) Berechnen Sie auch den Grenzwert dieser Reihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right)^n$$

(d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Potenzreihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 2^n}$$

Musterlösung:

(a) Wie bereits in Aufgabe 1 (b) gesagt, hat die Folge $(-1)^n \frac{n}{n+1}$ zwei verschiedene Häufungspunkte, ist also unbestimmt divergent und damit keine Nullfolge. Daher ist die Reihe nach dem Nullfolgenkriterium divergent.

(b) Wegen $\left|\frac{2}{7}\right| < 1$ handelt es sich um eine geometrische Reihe, welche (absolut) konvergent ist. Für deren Grenzwert gilt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n - 1 - \frac{2}{7} = \frac{1}{1-\frac{2}{7}} - \frac{9}{7} = \frac{7}{5} - \frac{9}{7} = \frac{4}{35}$$

(c) Sei $a_n := \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right)^n$. Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n} \to \frac{1}{3} < 1$$

folgt aus dem Wurzelkriterium, daß die Reihe (absolut) konvergiert.

(d) Sei $a_n := \frac{1}{n2^n}$. Für den Konvergenzradius des Potenzreihe gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n2^n}}{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$$

Also konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+1| < 2$, also $-2 < x+1 < 2$, also $-3 < x < 1$, also $x \in (-3,1)$ (absolut).

Es geht auch mit dem Quotientenkriterium: Sei $\tilde{a}_n := \frac{(x+1)^n}{n2^n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\tilde{a}_{n+1}}{\tilde{a}_n}\right| &= \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} \cdot \frac{|x+1|^{n+1}}{|x+1|^n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot |x+1| \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x+1| \to 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot |x+1| \end{aligned}$$

Dies ist < 1 genau dann, wenn $|x+1| < 2$, also wie oben, wenn $x \in (-3,1)$.

Es geht auch mit dem Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{(x+1)^n}{n2^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x+1| \to 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot |x+1|$$

Dies ist < 1 genau dann, wenn $|x+1| < 2$, also wie oben, wenn $x \in (-3,1)$.

Aufgabe 3 (3+3+4=10 Punkte)

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \log(x) + a, & x > 1, \\ ae^{x-1}, & x < 1, \\ a, & x = 1 \end{cases}$$

stetig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \sqrt[n]{x^2 + 1}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Grenzfunktion, und entscheiden Sie, ob es sich um punktweise oder gleichmäßige Konvergenz handelt! Beweisen Sie Ihre Antwort!

(c) Geben Sie ein offenes Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ an, in dem die Gleichung

$$x^5 + \sinh(x) = e$$

genau eine Lösung hat!
Hinweis: Existenz und Eindeutigkeit müssen bewiesen werden!
Zur Erinnerung: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Musterlösung:

(a) Die Logarithmusfunktion ist für $x \geq 1$ und die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Die einzige kritische Stelle ist $x = 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 1} f(x) &= \lim_{x \searrow 1} \log(x) + a = a \\ \lim_{x \nearrow 1} f(x) &= \lim_{x \nearrow 1} ae^{x-1} = a \end{aligned}$$

Somit stimmen links- und rechtsseitiger Grenzwert an der Stelle $x = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$ überein. Da ebenfalls $f(1) = a$ gilt, ist die Funktion für alle $a \in \mathbb{R}$ stetig.

(b) Da $\forall_{a>0} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, ist die Grenzfunktion die konstante Einsfunktion. Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \\ \Leftrightarrow\quad & \left|\sqrt[n]{x^2+1} - 1\right| \leq \varepsilon \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt[n]{x^2+1} - 1 \leq \varepsilon \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt[n]{x^2+1} \leq \varepsilon + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 + 1 \leq (\varepsilon + 1)^n \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 \leq (\varepsilon + 1)^n - 1 \\ \Leftrightarrow\quad & |x| \leq \sqrt{(\varepsilon + 1)^n - 1} \end{aligned}$$

Da es nicht möglich ist, ein globales, d.h. von x unabhängiges $n_0 \in \mathbb{N}$ zu wählen, so daß die letzte Ungleichung für alle $n \geq n_0$ und $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, ist die Konvergenz nur punktweise und nicht gleichmäßig.

(c) Betrachte die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := x^5 + \sinh(x) - e$. Die Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn g eine Nullstelle hat. Es gilt:

$$\begin{aligned} g(0) &= -e < 0 \\ g(2) &= 32 + \sinh(2) - e = 32 + \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) - e > 0 \end{aligned}$$

Da g als Zusammensetzung eines Monoms und der stetigen Sinushyperbolicus-Funktion stetig ist, gilt nach dem Zwischenwertsatz, daß g in dem offenen Intervall $(0, 2)$ mindestens eine Nullstelle hat. Wegen

$$\forall_{x>0}\ g'(x) = 5x^4 + \cosh(x) > 0$$

ist g auf $(0, 2)$ streng monoton wachsend. Somit ist die Nullstelle eindeutig.

Aufgabe 4 (3+3+4=10 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{3}{x^2+4}$$

(a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f, und entscheiden Sie, ob es sich um Minima oder Maxima handelt!

(c) Wo ist f konvex bzw. konkav? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Musterlösung:

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{6x}{(x^2+4)^2} \\ f''(x) &= -\frac{(x^2+4)^2 \cdot 6 - 2(x^2+4) \cdot 2x \cdot 6x}{(x^2+4)^4} = -\frac{-18x^2+24}{(x^2+4)^3} = \frac{18x^2-24}{(x^2+4)^3} \end{aligned}$$

(b) Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum lautet $f'(x) = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $6x = 0$, also $x = 0$. Wegen $f''(0) = -\frac{24}{64} < 0$, handelt es sich um ein lokales Maximum.

(c) f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ und konkav, wenn $f''(x) \leq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{18x^2-24}{(x^2+4)^3} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 18x^2 - 24 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 18x^2 \geq 24 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 \geq \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \ \vee \ x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Somit ist f auf $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ konvex und auf $\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ konkav.

Aufgabe 5 (3+4+4=10 Punkte)

(a) Ermitteln Sie eine Stammfunktion:

$$\int e^x(3-x^2)\,dx$$

(b) Ermitteln Sie eine Stammfunktion:

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx$$

(c) Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx$$

Musterlösung:

(a) Zweimal partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int e^x(3-x^2)\,dx &= e^x(3-x^2)+\int 2xe^x\,dx \\ &= e^x(3-x^2)+2\left(xe^x-\int e^x\,dx\right) \\ &= e^x(3-x^2)+2xe^x-2e^x+c \\ &= e^x(1-x^2+2x)+c\end{aligned}$$

(b) Die pq-Formel liefert $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ als Nullstellen von x^2-3x+2. Partialbruchzerlegung liefert ($A, B \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x^2-3x+2} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B)x+(-2A-B)}{x^2-3x+2}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das Lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}A+B &= 1 \\ -2A-B &= 1\end{aligned}$$

mit Lösung $A=-2$ und $B=3$. Somit gilt:

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{-2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\,dx = -2\log|x-1|+3\log|x-2|+c$$

(b) Substiuiere $z(x) := \cos(x)$. Dann gilt $\frac{dz}{dx} = -\sin(x) \;\Leftrightarrow\; dx = \frac{dz}{-\sin(x)}$, $z(0)=1$, $z\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Somit gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \int_1^0 \frac{\sin(x)}{\sqrt{z}}\frac{dz}{-\sin(x)} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_0^1 = 2-0 = 2$$

Aufgabe 6 (1+3+3+3=10 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x^2 y - \cos(y)$$

(a) Bestimmen Sie ∇f.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(2,2)$ in Richtung des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

(d) Zeigen Sie, daß bei $(0,\pi)$ ein Sattelpunkt vorliegt!

Musterlösung:

(a)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + \sin(y) \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} D_v f(2,2) &= \left\langle \nabla f(2,2), \frac{v}{||v||} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 4+\sin(2) \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(8+4+\sin(2)) = \frac{12+\sin(2)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(c) Zur Bestimmung der stationären Punkte setze $\nabla f(x,y) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies führt zu dem folgenden nichtlinearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2xy &= 0 \\ x^2 + \sin(y) &= 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert $x = 0 \ \vee \ y = 0$. Im Falle $x = 0$ ergibt sich in der zweiten Gleichung $\sin(y) = 0$. Wegen $y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ist dies genau dann der Fall, wenn $y = \pi$. Also ist $(0,\pi)$ ein stationärer Punkt.
Im Falle $y = 0$ ergibt sich in der zweiten Gleichung $x^2 = 0$, also $x = 0$. Also ist $(0,0)$ ebenfalls ein stationärer Punkt. Weitere stationäre Punkte gibt es nicht.

(d) $(0,\pi)$ ist gemäß (c) ein stationärer Punkt. Falls (c) nicht gelöst wurde, so muß hier der Punkt in den Gradienten eingesetzt werden:

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Hesse-Matrix gilt:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & \cos(y) \end{pmatrix}$$

Weiterhin

$$D^2 f(0,\pi) = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von $D^2 f(0,\pi)$ sind direkt auf der Diagonalen ablesbar. Da diese unterschiedliches Vorzeichen haben und kein Eigenwert 0 ist, ist die Matrix indefinit, und somit liegt ein Sattelpunkt vor.

Es geht auch über die Hauptminoren: $H_1 = 2\pi > 0, H_2 = -2\pi < 0$. Es liegt also weder der Fall $H_1 > 0 \wedge H_2 > 0$ noch der Fall $H_1 < 0 \wedge H_2 > 0$ vor, noch ist $\det(D^2 f(0,\pi)) = H_2 = 0$. Also ist die Matrix indefinit, und es liegt ein Sattelpunkt vor.