**Hochschule**
**Bonn-Rhein-Sieg**
*University of Applied Sciences*

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

# Analysis
## Übungsblatt 5
## Sommersemester 2024
## – Musterlösungen –

**Aufgabe 1 (Heron-Verfahren zur Wurzelbestimmung)**

Bestimmen Sie die ersten sechs Iterationen $x_1, ..., x_6$ des Heron-Verfahrens zur Bestimmung von $\sqrt[3]{5}$ mit dem Startwert $x_0 := 1$, und verifizieren Sie die quadratische Konvergenz!

**Hinweis**: Hilfreich wäre hier ein kleines Computerprogramm!

**Musterlösung:**

Die Iterationsvorschrift des Heronverfahrens lautet allgemein

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p x_n^{p-1}}$$

Hier gilt $a = 5$ und $p = 3$.

Die ersten sechs Iteration lauten (erhalten durch das *python*-Programm `heron.py`, siehe LEA):

$x_1 = 2.33333333333$
$x_2 = 1.86167800454$
$x_3 = 1.72200188006$
$x_4 = 1.7100597366$
$x_5 = 1.70997595078$
$x_6 = 1.70997594668$

Die Anzahl an Nullen hinter dem Komma erhöht sich beim Fehler $|x_n - \sqrt[3]{5}|$ ab $x_3$ um etwa den Faktor 2, also kann man sehen, daß das Verfahren quadratisch konvergiert:

$|x_1 - \sqrt[3]{5}| =$0.623357386657
$|x_2 - \sqrt[3]{5}| =$0.151702057858
$|x_3 - \sqrt[3]{5}| =$0.0120259333819
$|x_4 - \sqrt[3]{5}| =$8.37899235977e-05
$|x_5 - \sqrt[3]{5}| =$4.10549216845e-09
$|x_6 - \sqrt[3]{5}| =$2.22044604925e-16

Die Lösung lautet $\sqrt[3]{5} \approx 1.70997594668$. Der Wert $x_6$ liefert also bis auf einen Fehler in der Größenordnung von $10^{-16}$ eine sehr gute Annäherung.

**Alternative Lösung (nach Satz 2.29, Becker)**

Das verallgemeinerte Heron-Verfahren für $k$-te Wurzeln ist definiert durch:

$$x_1 = a$$
$$x_n = \frac{1}{k}\left((k-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{k-1}}\right) \text{ für } n \geq 2$$

Hier gilt $a = 5$ und $k = 3$.

Die ersten sieben Iteration lauten (erhalten durch ein *Java*-Programm):

$x_1 =$3.4
$x_2 =$2.4108419838523645
$x_3 =$1.8939831599514854
$x_4 =$1.7272739664874979
$x_5 =$1.710148601756556
$x_6 =$1.7099759641072134
$x_7 =$1.709975946676697

Die Anzahl an Nullen hinter dem Komma erhöht sich beim Fehler $|x_n - \sqrt[3]{5}|$ ab $x_4$ um etwa den Faktor 2, also kann man sehen, daß das Verfahren quadratisch konvergiert:

$|x_1 - \sqrt[3]{5}| =$1.690024053323303
$|x_2 - \sqrt[3]{5}| =$0.7008660371756676

$|x_3 - \sqrt[3]{5}|$ =0.18400721327478853
$|x_4 - \sqrt[3]{5}|$ =0.017298019810801035
$|x_5 - \sqrt[3]{5}|$ =1.7265507985908535E-4
$|x_6 - \sqrt[3]{5}|$ =1.7430516585648093E-8
$|x_7 - \sqrt[3]{5}|$ =2.220446049250313E-16

Die Lösung lautet $\sqrt[3]{5} \approx 1.70997594668$. Der Wert $x_7$ liefert also bis auf einen Fehler in der Größenordnung von $10^{-16}$ eine sehr gute Annäherung.

**Aufgabe 2 (Häufungspunkte, Limes superior und Limes inferior)**

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Ein Punkt $x$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, falls

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{n_0\in\mathbb{N}}\ \exists_{n\geq n_0}\ |x_n - x| \leq \varepsilon$$

In jedem (noch so kleinen) $\varepsilon$-Streifen um den Häufungspunkt $x$ wird man, egal wie man $n_0$ wählt, immer noch mindestens ein Folgeglied $x_n$ mit $n \geq n_0$ finden, das in dem $\varepsilon$-Streifen liegt. Nach Satz 3.9 Hülsmann ist der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge von $(x_n)$ stets Häufungspunkt. Weiterhin sind der *Limes superior* und der *Limes inferior* von $(x_n)$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} x_n &:= \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} x_m, \\ \liminf_{n\to\infty} x_n &:= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} x_m \end{aligned}$$

**(i)** Machen Sie sich anhand einer Skizze klar, daß die Folge $\left(\sup_{m\geq n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt und die Folge $\left(\inf_{m\geq n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.

**(ii)** Überlegen Sie sich, daß $\limsup_{n\to\infty} x_n$ der größte und $\liminf_{n\to\infty} x_n$ der kleinste Häufungspunkt von $(x_n)$ ist!

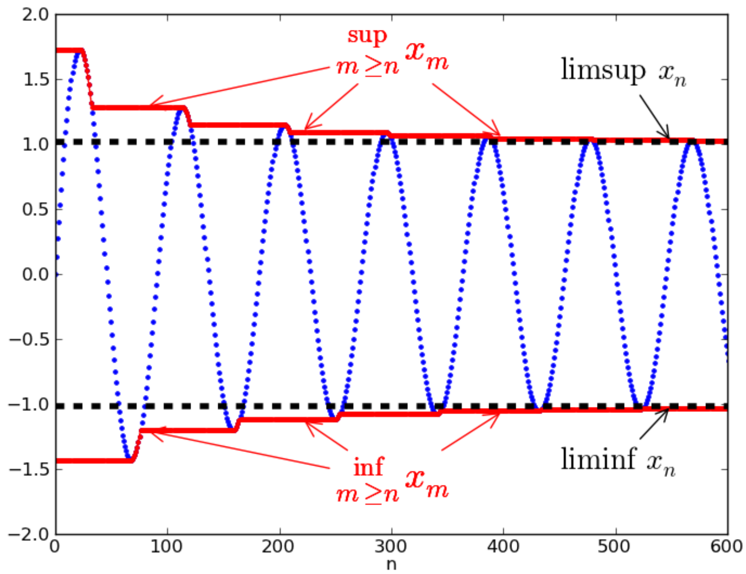
**(iii)** Bestimmen Sie Limes superior und Limes inferior der folgenden Folgen:

$$(-1)^n, \quad \frac{(-1)^n}{n+3}, \quad \frac{2n}{2+(-1)^n n}$$

**(iv)*** Sei $M := \left\{ \frac{2n}{2+(-1)^n n} \ \middle|\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Bestimmen Sie $\sup(M)$ und $\inf(M)$.

**Musterlösung:**

**(i)**




**(ii)** Da die Folge $(x_n)$ nach oben beschränkt ist (sonst würde der Limes superior nicht existieren), hat sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, also einen Häufungspunkt $x := \lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m}$. Setze $b_n := \sup_{m\geq n} x_m$. Diese Folge ist gemäß den Überlegungen aus **(i)** monoton fallend, und da $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} x_m = \limsup_{n\to\infty} x_n$, nach unten durch den Limes superior beschränkt. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist die Folge $(b_n)$ damit konvergent. Für deren Grenzwert gilt:

$$b := \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} x_m = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

Da $(b_n)$ monoton fallend, ist $b_n = \max_{m\geq n} x_m$ eine konvergente Teilfolge von $(x_n)$. Also ist deren Grenzwert $b = \limsup_{n\to\infty} x_n$ ein Häufungspunkt von $(x_n)$. Damit ist schonmal gezeigt, daß der Limes superior ein Häufungspunkt ist. Bleibt zu zeigen, daß es der kleinste ist: Sei $\tilde{b}$ weiterer Häufungspunkt von $(x_n)$. Dann gibt es eine Teilfolge $(\tilde{b}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)$ mit $\tilde{b} = \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{b}_{n_k}$. Wegen

$$b_{n_k} = \sup_{\ell\geq n_k} x_\ell \geq \tilde{b}_{n_k}$$

gilt für den Grenzwert

$$b = \lim_{k\to\infty} b_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} \tilde{b}_{n_k} = \tilde{b}$$

Also gilt $\limsup_{n\to\infty} x_n \geq \tilde{b}$ für jeden weiteren Häufungspunkt $\tilde{b}$. Daß der Limes inferior der größte Häufungspunkt ist, zeigt man völlig analog.

**(iii)**

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}(-1)^n &= 1 \\
\liminf_{n\to\infty}(-1)^n &= -1 \\
\limsup_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+3} &= 0 \\
\liminf_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+3} &= 0
\end{aligned}$$

Die Folge $\frac{(-1)^n}{n+3}$ ist konvergent. Limes superior und Limes inferior sind gleich und stimmen mit dem Grenzwert überein.

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\frac{2n}{2+(-1)^n n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{2+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{n}+1} = 2 \\
\liminf_{n\to\infty}\frac{2n}{2+(-1)^n n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{1-2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}-2} = -2
\end{aligned}$$

Es wurden hier stets die beiden Teilfolgen untersucht, die sich ergeben, wenn $n$ gerade une wenn $n$ ungerade ist.

**(iv)*** Sei $a_n := \frac{2n}{2+(-1)^n n}$. Wie in **(iii)** gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{2n} = \frac{2}{\frac{1}{n}+1} < 2$$

für gerade $n$. Die Teilfolge $a_{2n+1}$ ist streng monoton wachsend, beginnend mit $a_3 = -6$, gegen $\liminf_{n\to\infty} a_n = -2$, denn es gllt:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{2n+1} = \frac{4n+2}{1-2n} = \frac{-4n-2}{2n-1} = -2-\frac{4}{2n-1} < -2-\frac{4}{2n+1} = a_{2(n+1)+1}$$

Wegen $a_1 = 2$, gilt also insgesamt:

$$\begin{aligned}
\sup(M) &= 2 \\
\inf(M) &= -6
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3 (Konvergenzkriterien für (Teil-)folgen)**

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz bzw. auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz geeigneter Teilfolgen. Geben Sie im Falle der Konvergenz auch jeweils den Grenzwert an!

**(i)** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}(n-1)} - 3,\ n \in \mathbb{N}_{>1}$ (3 Punkte)

**(ii)** die rekursiv definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit (3 Punkte)

$$b_0 = 1,\ b_n = \sqrt{1 + b_{n-1}}$$

**Hinweis:** Verwenden Sie zum Beweis der Beschränktheit und der Monotonie jeweils vollständige Induktion!

**Musterlösung:**

**(i) Beschränktheit:** Wegen

$$-3 \leq \frac{1}{\sqrt{n}(n-1)} - 3 \leq \frac{1}{\sqrt{n}(n-1)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist $a_n$ sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, also beschränkt.

Weiterhin gilt

**Monotonie:**

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1} \cdot n} - 3 < \frac{1}{\sqrt{n}(n-1)} - 3 = a_n$$

Somit ist $a_n$ streng monoton fallend, also nach dem Satz über die monotone Konvergenz konvergent.

**Grenzwert:** Für den Grenzwert gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n-1)} - 3 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} - 3 = 0 \cdot 0 - 3 = -3$$

**(ii) Beschränktheit:** Zeige mit vollständiger Induktion: $\forall_{n\in\mathbb{N}_0}\ 1 \leq b_n \leq 2$:

**Induktionsanfang:** $(n = 0)$: Es gilt $1 \leq x_0 = 1 \leq 2$.
**Indutkionsvoraussetzung (IV):** Es gelte $1 \leq b_n \leq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.
**Induktionsschritt:** Zeige, daß unter der IV auch die Aussage für $n + 1$ erfüllt ist, daß also gilt:

$$1 \leq b_{n+1} \leq 2$$

Es gilt:

$$1 \leq \sqrt{2} = \sqrt{1+1} \overset{\mathrm{IV}}{\leq} \sqrt{1+b_n} = b_{n+1} = \sqrt{1+b_n} \overset{\mathrm{IV}}{\leq} \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \leq 2$$

Also ist $(b_n)$ beschränkt.

**Monotonie:** Zeige mittels vollständiger Induktion, daß $(b_n)$ monoton wachsend ist.

**Induktionsanfang:** $(n = 0)$: Es gilt

$$b_1 = \sqrt{1+b_0} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \geq 1 = b_0$$

**Induktionsvoraussetzung (IV):** Es gelte $b_{n+1} \geq b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.
**Induktionsschritt:** Zeige, daß unter der IV auch die Aussage für $n+1$ erfüllt ist, daß also gilt:

$$b_{n+2} \geq b_{n+1}$$

Aufgrund der Monotonie der Quadratwurzel gilt:

$$b_{n+2} = \sqrt{1+b_{n+1}} \overset{\mathrm{IV}}{\geq} \sqrt{1+b_n} = b_{n+1}$$

Damit ist $(b_n)$ monoton wachsend, also nach dem Satz über die monotone Konvergenz konvergent.

**Grenzwert:** Sei $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt:

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+b_{n-1}} = \sqrt{1+\lim_{n\to\infty} b_{n-1}} = \sqrt{1+b}$$

Der Grenzwert $b$ muß daher die Gleichung $b = \sqrt{1+b}$ erfüllen. Es gilt:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{1+b} \\ \Leftrightarrow\ b^2 &= 1+b \\ \Leftrightarrow\ b^2 - b - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$p, q$-Formel liefert die Lösungen $b^{(1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $b^{(2)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Da $b^{(2)}$ negativ ist, wegen $\forall_{n\in\mathbb{N}_0} b_n \in [1,2]$ jedoch auch der Grenzwert im Intervall $[1,2]$ liegen muß, ist $b^{(1)}$, also die Zahl des Goldenen Schnitts (muß nicht unbedingt angegeben werden!), der gesuchte Grenzwert.

**Aufgabe 4 (Grenzwerte von Folgen im $\mathbb{R}^n$ und in $\mathbb{C}$)**

Sind folgende Folgen konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

**(i)** $a_n = \left(-\frac{1}{n^2}, 2^{-n}, \sqrt[n]{n}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$

**(ii)** $b_n = \frac{1+ni}{1+2n} \subseteq \mathbb{C}$

**(iii)** $c_n = i^n + (-1)^n \subseteq \mathbb{C}$

**Musterlösung:**

**(i)** Da alle Komponentenfolgen konvergent sind, ist auch $(a_n)$ konvergent mit dem Grenzwert

$$(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$$

**(ii)** Es gilt

$$b_n = \frac{1}{1+2n} + \frac{n}{1+2n} i$$

Da sowohl Real- als auch Imaginärteilfolge konvergent sind, ist auch $(b_n)$ konvergent mit dem Grenzwert

$$0 + 1 \cdot i = i \in \mathbb{C}$$

**(iii)** Es gilt

$$c_n = i^n + (-1)^n = \begin{cases} 1+1=2, & n = 4k, k \in \mathbb{Z} \\ i-1, & n = 4k+1, k \in \mathbb{Z}, \\ -1+1=0, & n = 4k+2, k \in \mathbb{Z}, \\ -i-1, & n = 4k+3, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Wegen $|i-1| = |-i-1| = \sqrt{2}$, gilt insgesamt $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |c_n| \leq 2$. Daher ist die Folge beschränkt. Da $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper ist, kann keine Aussage über Monotonie getroffen werden. Die Folge besteht aus vier unterschiedlichen Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten, ist daher also unbestimmt divergent.