Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 1
Sommersemester 2024
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Indexverschiebung)

Beweisen Sie durch geeignete Indexverschiebungen:

$$\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}_0}\ (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1}$$

Musterlösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} &= a\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} - b\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k+1} - b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)+1} - b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-k} - b^{n+1} \\
&= a^{n+1} - b^{n+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Binomische Formel)

(i) Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an. Das entspricht der Anzahl der Möglichkeiten aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln zu ziehen, wobei die Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge der gezogenen Kugeln keine Rolle spielt (mathematisch nennt man das auch (n,k)-*Kombinationen ohne Wiederholung*). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim *Lotto* 6 *aus* 49 sechs Richtige anzukreuzen?

(ii) Beweisen Sie die Rekursionsgleichung

$$\binom{0}{0} = 1, \ \binom{1}{0} = 1, \ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{für } n \geq k \geq 0, \, n \geq 2$$

(iii) Die Rekursionsgleichung aus **(ii)** ist die Grundlage für das so genannte *Pascalsche Dreieck*:

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
$\vdots$						$\dots$					

Der Wert, der in der n-ten Zeile und der k-ten Spalte steht, ergibt sich als Summe der beiden Werte, die in der Zeile darüber, also in der $(n-1)$-ten Zeile, und dort in derselben Spalte und in der Spalte davor, also in der k-ten und der $(k-1)$-ten Spalte stehen.

Ermitteln Sie mithilfe des Pascalschen Dreiecks die Binomialkoeffizienten $\binom{3}{2}$, $\binom{9}{6}$ und $\binom{7}{5}$.

(iv) Beweisen Sie die Binomische Formel, also zeigen Sie, daß für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Hinweise:
Verwenden Sie vollständige Induktion sowie die Rekursionsgleichung aus **(ii)**)! Führen Sie eine oder mehrere Indexverschiebungen durch!

(v) Berechnen Sie mithilfe von **(iv)** die Binome $(a+b)^5$ und $(a+b)^6$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

(vi) Beweisen Sie mithilfe der Binomischen Formel:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Musterlösung:

(i) Wir müssen die Anzahl der $(49, 6)$-Kombinationen ohne Wiederholung bestimmen:

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 22 \cdot 3 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 2 \cdot 49 = 13\,983\,816$$

6 Zahlen aus 49 zu ziehen; die Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige ist also 1 zu 13 983 816.

(ii) Wir rechnen mithilfe von Bruchrechnung:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))} + \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k-1)!(n-k} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot (k + (n-k))}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

(iii) Es gilt $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{9}{6} = 84$ und $\binom{7}{5} = 21$.

(iv) Der Beweis wird mit vollständiger Induktion geführt:
Induktionsanfang ($n = 0$):

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^{0-0} b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$): Nehme an, daß für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ (IV)}$$

und zeige, daß die Aussage dann auch für $n+1$ erfüllt ist, also daß gilt:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Dazu:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^{n+1} \\
&\overset{\text{IV}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-(k-1)} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-(k-1)} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \text{ (Indexverschiebung)} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right) a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \text{ (wegen obiger Gleichung)} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-(k-1)} b^k + b^{n+1} \text{ (Indexverschiebung)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

(v) Es gilt

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
\end{aligned}$$

Auch hierbei lassen sich die Koeffizienten wieder direkt aus dem Pascalschen Dreieck ablesen.

(vi) Setze in der binomischen Formel $a = b = 1$, und es ergibt sich

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Wähle in der binomischen Formel $a = 1$ und $b = -1$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$$

Aufgabe 3 (Potenzen)

Welche Zahl ist größer: 1.01^{100} oder 2? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Musterlösung:

Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt (da $0.01 \geq -1$):

$$1.01^{100} = (1 + 0.01)^{100} \geq 1 + 100 \cdot 0.01 = 1 + 1 = 2$$

Also ist 1.01^{100} größer (Gleichheit kann nicht gelten, da sicherlich $\sqrt[100]{2} \neq 1.01$).

Es geht auch mit der binomischen Formel:

$$\begin{aligned} 1.01^{100} = (1+0.01)^{100} &= \sum_{k=0}^{100} \binom{n}{k} 1^{n-k} 0.01^k = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 0.01^k \\ &= 1 + 100 \cdot 0.01 + \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k} 0.01^k \\ &= 1 + 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k} 0.01^k}_{>0} > 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Bruchrechnung und Termumformungen mit binomischen Formeln)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $y \in \mathbb{R}\backslash\{-5\}$. Zeigen Sie:

(i)

$$a^2 + b^2 = 5ab \;\Rightarrow\; \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 23$$

(ii)

$$y + \frac{1}{y+5} = -7 \;\Rightarrow\; (y+7)^9 + \frac{1}{(y+7)^9} = 2$$

Musterlösung:

(i) Nach binom. Formel und Vor. gilt

$$(a^2+b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 25a^2b^2$$

und somit

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \quad = \quad \frac{a^4+b^4}{a^2b^2} = \frac{23a^2b^2}{a^2b^2} = 23$$

(ii) Nach Vor. gilt

$$\begin{aligned} & y(y+5)+1 = -7(y+5) \\ \Leftrightarrow \quad & y^2+5y+1 = -7y-35 \\ \Leftrightarrow \quad & y^2+12y+36 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (y+6)^2 = 0 \text{ (binom. Formel)} \\ \Leftrightarrow \quad & y = -6 \end{aligned}$$

Also:

$$(y+7)^9 + \frac{1}{(y+7)^9} = (-6+7)^9 + \frac{1}{(-6+7)^9} = 1+1 = 2$$