



Analysis
Übungsblatt 14
Sommersemester 2026
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Extrema und Sattelpunkte im $\mathbb{R}^N$)

Bestimmen Sie alle Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 + x^2 + y^2$$

Musterlösung:

Aufgabe 2 (Gradient, Richtungsableitungen, lokale Extrema und Sattelpunkte im $\mathbb{R}^N$)

Klausuraufgabe WS 2025/26: Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := 4x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$$

- (a) Bestimmen Sie $\nabla f(x, y)$.
- (b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, 2)$ in Richtung des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- (c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f .
- (d) Zeigen Sie, daß bei $(0, 0)$ ein lokales Maximum und bei $(\frac{1}{2}, 0)$ ein Sattelpunkt vorliegt!

Musterlösung:

(a)

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 16x^3 - 4x \\ 4y^3 - 4y \end{pmatrix}$$

(b) Die Formel für die Richtungsableitung lautet

$$D_v f(1, 2) = \left\langle \nabla f(1, 2), \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{12}{\sqrt{2}}$$

(c) Setze den Gradienten gleich dem Nullvektor. Dann ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 4x(4x^2 - 1) &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2} \\ 4y(y^2 - 1) &= 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = 1 \vee y = -1 \end{aligned}$$

Somit gibt es insgesamt neun stationäre Punkte:

$$(0, 0), (0, 1), (0, -1), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$$

(d) Die Hesse-Matrix lautet

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 48x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Setze die beiden stationären Punkte ein:

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Da die Hesse-Matrix Diagonalgestalt hat, sind die Eigenwerte direkt auf der Diagonalen ablesbar. Da beide Eigenwerte echt negativ sind, ist die Hesse-Matrix negativ definit, und somit liegt ein lokales Maximum vor.

$$D^2 f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Da die Eigenwerte unterschiedliche Vorzeichen haben, ist die Hesse-Matrix indefinit, und somit liegt ein Sattelpunkt vor.

Aufgabe 3* (Lokale Extrema und Sattelpunkte im $\mathbb{R}^N$)

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := -x^2y + 6xy - xy^2$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte!

Musterlösung:

Für den Gradienten von f gilt

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2xy + 6y - y^2 \\ -x^2 + 6x - 2xy \end{pmatrix}$$

Setze diesen gleich dem Nullvektor. Dann muß gelten:

$$\begin{aligned} -2xy + 6y - y^2 = 0 &\Leftrightarrow -2x + 6 - y = 0 \\ \Leftrightarrow y &= -2x + 6 \end{aligned}$$

im Falle $y \neq 0$. Setze dieses Resultat in die zweite Gleichung ein:

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x - 2xy &= -x^2 + 6x - 2x(-2x + 6) \\ &= -x^2 + 6x + 4x^2 - 12x = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $y = 6$. Also ist $(0, 6)$ ein stationärer Punkte von f .

Für $x = 2$ gilt $y = 2$. Also ist auch $(2, 2)$ ein stationärer Punkt von f .

Im Falle $y = 0$ gilt aufgrund der zweiten Gleichung $-x^2 + 6x = x(6 - x) = 0$.

Also sind $(0, 0)$ und $(6, 0)$ ebenfalls stationäre Punkte.

Für die Hesse-Matrix von f gilt:

$$D^2f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x + 6 - 2y \\ -2x + 6 - 2y & -2x \end{pmatrix}$$

Weiterhin:

$$D^2f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den ersten Hauptminor gilt $H_1 = 0$ und für den zweiten Hauptminor $H_2 = -36 < 0$. Es liegt also weder der Fall $> 0, > 0$ noch der Fall $< 0, > 0$ vor. Da $H_2 \neq 0$, ist $D^2f(0, 0)$ somit indefinit, und es liegt ein Sattelpunkt vor.

$$D^2f(0, 6) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den ersten Hauptminor gilt $H_1 = -12 < 0$ und für den zweiten Hauptminor $H_2 = -36 < 0$. Es liegt also weder der Fall $> 0, > 0$ noch der Fall

$< 0, > 0$ vor. Da $H_2 \neq 0$, ist $D^2f(0, 6)$ somit indefinit, und es liegt ein Sattelpunkt vor.

$$D^2f(6, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & -12 \end{pmatrix}$$

Für den ersten Hauptminor gilt $H_1 = 0$ und für den zweiten Hauptminor $H_2 = -144 < 0$. Es liegt also weder der Fall $> 0, > 0$ noch der Fall $< 0, > 0$ vor. Da $H_2 \neq 0$, ist $D^2f(6, 0)$ somit indefinit, und es liegt ein Sattelpunkt vor.

$$D^2f(2, 2) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Für den ersten Hauptminor gilt $H_1 = -4 < 0$ und für den zweiten Hauptminor $H_2 = -12 > 0$. Es liegt also der Fall $< 0, > 0$ vor. Somit ist $D^2f(2, 2)$ negativ definit, und es liegt ein Maximum vor.