Lösung allgemeiner linearer Programme

Bisher: Für Anwendung des Simplexalgorithmus muss eine primal oder eine dual zulässige Basislösung vorliegen.

Für allgemeine lineare Programme können wir dies direkt nicht gewährleisten.

Im Folgenden: Unter Ausnutzung dualer Techniken leiten wir eine Methode her, mit der zu jedem LP, dass eine optimale Lösung hat, eine solche berechnet werden kann.

Allgemeine Form

Wir gehen von einem LP mit n Variablen und m Nebenbedingungen aus. Die Zielfunktion habe die Gestalt

$$\text{min oder max} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} \right\} b_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

und Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_j \geq 0 \text{ für einige oder alle } j = 1, \ldots, n.$$

Anforderungen für primalen Simplex

- zu maximierende Zielfunktion
- nur Gleichheitsbedingungen
- Nichtnegativitätsbedingungen für alle Variablen
- ein nichtnegativer Vektor auf der rechten Seite
- ein primal zulässiges Ausgangstableau in kanonischer Form, d.h. mit m Einheitsvektoren, die eine Basis bilden

Zielfunktion, rechte Seite, Vorzeichenbeschränkung

(1) Falls eine zu minimierende Zielfunktion vorliegt, multipliziere diese mit -1 und maximiere $-z$.

(2) Multipliziere alle Gleichungen und Ungleichungen der Nebenbedingungen mit $b_i < 0$ mit dem Faktor -1.

(3) Ersetze jede nicht vorzeichenbeschränkte Variable x_j durch zwei vorzeichenbeschränkte Variablen $x_j' \geq 0$ und $x_j'' \geq 0$ mit $x_j = x_j' - x_j''$.

Damit hat das lineare Programm die Gestalt:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & \text{für } i = 1, \ldots, m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \geq & b_i & \text{für } i = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i & \text{für } i = m_1 + m_2 + 1, \ldots, m_1 + m_2 + m_3 \end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_j \geq 0 \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

Bemerkungen:

- n ist die Anzahl der Variablen nach Schritt (1) bis (3).
- m_1, m_2, m_3 bezeichnet dabei die Anzahl der $\leq$-, $\geq$- und $=$-Nebenbedingungen.
- $m := m_1 + m_2 + m_3$

Erzeuge Normalform

(4) Wandle jede $\leq$-Nebenbedingung durch eine Schlupfvariable um in eine Gleichung der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

(5) Wandle jede $\geq$-Nebenbedingung durch eine Schlupfvariable um in eine Gleichung der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

Alle Schlupfvariablen x_{n+i} sind vorzeichenbeschränkt, also $x_{n+i} \geq 0$. Jetzt haben wir Normalform, aber keine kanonische Normalform und damit noch kein primal zulässiges Tableau.

Künstliche Variablen

(6) Addiere zu jeder ursprünglichen $\geq$-Nebenbedingung eine künstliche Variable $y_k \geq 0$, so dass die Nebenbedingung lautet:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} + y_k = b_i$$

(7) Addiere zu jeder ursprünglichen $=$-Nebenbedingung eine künstliche Variable $y_k \geq 0$, so dass die Nebenbedingung lautet:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_k = b_i$$

Jetzt haben wir ein Simplextableau in kanonischer Form mit der Basislösung

- $x_{m+i} = b_i$
  für die x_{m+i} von ursprünglichen $\leq$-Nebenbedingungen und
- $y_k = b_k$
  für die ursprünglichen $\geq$- und $=$-Nebenbedingungen.

Problem: Nur wenn für alle künstlichen Variablen $y_k = 0$ gilt, ist dieses LP äquivalent zum ursprünglichen LP.

Zweite Zielfunktion

(8) Bilde aus den künstlichen Variablen die zusätzliche Zielfunktion

$$\min Y = \sum_{k=1}^{m_2+m_3} y_k$$

Entsteht bei der Minimierung $Y = 0$, dann wird die Erweiterung nivelliert und wir haben eine zulässige Basislösung.

(9) Multipliziere die zusätzliche Zielfunktion mit dem Faktor -1, um eine Maximierung zu erhalten.

$$\max y = -Y = \sum_{k=1}^{m_2+m_3} -y_k$$

(10) Löse alle Gleichungen mit künstlichen Variablen nach diesen auf

$$y_k = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{m+i} \right)$$

bzw.

$$y_k = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

und ersetze sie in der zweiten Zielfunktion durch die gewonnenen Ausdrücke.
Dieser Schritt dient dazu, dass die Koeffizienten der y_k in der Zielfunktionszeile zu 0 werden zu lassen, damit ein primal zulässiges Tableau vorliegt.

Insgesamt haben wir jetzt ein primal zulässiges Simplextableau vorliegen.

Zweiphasen-Simplexalgorithmus

Algorithmus 5.15

Bearbeite das durch die Schritte (1) bis (10) aufgestellte Tableau in zwei Phasen:

1. **Eröffnungsphase**
   Maximiere die Zielfunktion $y = -Y$ mit Hilfe des primalen Simplexalgorithmus. Transformiere dabei die ursprüngliche Zielfunktion z stets mit.
   - Gilt für das Optimum $y < 0$, dann existiert keine zulässige Lösung für das ursprüngliche LP.
   - Gilt $y = 0$, dann streiche die Zeile mit der zweiten Zielfunktion und die künstlichen Variablen und fahre mit Phase 2 fort.
2. **Optimierungsphase**
   Maximiere die erste Zielfunktion mit dem primalen Simplex-Algorithmus.

Bemerkung

- In der Eröffnungsphase nähert man sich schrittweise einer Ecke der Menge $\mathcal{X}$ der zulässigen Lösungen.
- In der Optimierungsphase bestimmt man ausgehend von der gefundenen Ecke aus der Eröffnungsphase eine optimale Lösung des LP.

Beispiel: Zweiphasen-Simplexalgorithmus

Beispiel 5.16

Wir betrachten das folgende LP:

$$\min Z = -x_1 - 2x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & \leq & 8 & \quad \text{(I)} \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 & \quad \text{(II)} \\ x_1 & - & x_2 & = & -3 & \quad \text{(III)} \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

(1)

$$\max z = -Z = x_1 + 2x_2$$

Fortsetzung Beispiel.

(2) Wir multiplizieren (III) mit -1 und erhalten die neue Gleichung (III):

$$-x_1 + x_2 = 3$$

(3) entfällt, alle Variablen sind vorzeichenbeschränkt

(4,5) Wir führen für (I) und (II) Schlupfvariablen ein:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 8 & \quad \text{(I)} \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_4 & = & 2 & \quad \text{(II)} \end{array}$$

(6,7) Künstliche Variablen für (II) und (III):

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_4 & + & y_1 & = & 2 & \quad \text{(II)} \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & y_2 & = & 3 & \quad \text{(III)} \end{array}$$

Fortsetzung Beispiel.

(8) Zusätzliche Zielfunktion:

$$\min Y = y_1 + y_2$$

(9) Optimierungsrichtung der zusätzlichen Zielfunktion herumdrehen:

$$\max y = -Y = -y_1 - y_2$$

(10) Wir lösen (II) und (III) nach y_1 bzw. y_2 auf

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1 & = & 2 & - & 2x_1 & - & x_2 & + & x_4 \\ y_2 & = & 3 & + & x_1 & - & x_2 & & \end{array}$$

und setzen die Terme der rechten Seiten in die Zielfunktion ein. Hierdurch entsteht

$$y = -5 + x_1 + 2x_2 - x_4$$

Fortsetzung Beispiel.

Damit können wir das 1. Tableau für die Eröffnungsphase aufstellen:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	**b**
x_3	1	1	1	0	0	0	8
y_1	2	1	0	−1	1	0	2
y_2	−1	1	0	0	0	1	3
z	−1	−2	0	0	0	0	0
y	−1	−2	0	1	0	0	−5

Wir maximieren y und wählen dazu x_2 als Pivotspalte. Damit ist y_1 die Pivotzeile.

Fortsetzung Beispiel.

2. Tableau Eröffnungsphase:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	**b**
x_3	-1	0	1	1	-1	0	6
x_2	2	1	0	-1	1	0	2
y_2	-3	0	0	1	-1	1	1
z	3	0	0	-2	2	0	4
y	3	0	0	-1	2	0	-1

Man beachte, dass auch die Zeile für die ursprüngliche Zielfunktion angepasst wurde.
Jetzt bleibt nur x_1 als Pivotspalte, dann ist y_2 die Pivotzeile.

Fortsetzung Beispiel.

3. Tableau Eröffnungsphase:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	**b**
x_3	2	0	1	0	0	-1	5
x_2	-1	1	0	0	0	1	3
x_4	-3	0	0	1	-1	1	1
z	-3	0	0	0	0	2	6
y	0	0	0	0	1	1	0

Damit ist die Eröffnungsphase abgeschlossen und wir haben mit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Startecke für die Optimierungsphase.

Fortsetzung Beispiel.

Wir streichen die künstlichen Variablen und die zusätzliche Zielfunktionszeile und erhalten damit das 1. Tableau der Optimierungsphase:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$
x_3	2	0	1	0	5
x_2	-1	1	0	0	3
x_4	-3	0	0	1	1
z	-3	0	0	0	6

Es liegt noch keine optimale Lösung vor.
Pivotspalte wird x_1, Pivotzeile x_3.

Fortsetzung Beispiel.

2. Tableau Optimierungsphase:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}$
x_1	1	0	1/2	0	5/2
x_2	0	1	1/2	0	11/2
x_4	0	0	3/2	1	17/2
z	0	0	3/2	0	27/2

Damit terminiert der Zweiphasen-Simplexalgorithmus.

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$ ist eine optimale Lösung des originären LP,

mit Zielfunktionswert $Z = -\frac{27}{2}$.

Zusammenfassung

- Zu jedem primalen LP gibt es ein korrespondierendes duales LP.
- Die Betrachtung sowohl des primalen als auch des dualen LP ermöglicht tiefergehende Einblicke in das zu Grunde liegende Problem.
- Zueinander duale LPs sind eng miteinander verbunden: gegenseitige Schranken, Gleichheit der Zielfunktionen in den Optima, Entsprechungen bei Struktur-, Schlupf-, Basis-, und Nichtbasisvariablen.
- Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus zur allgemeinen Lösung von linearen Programmen.