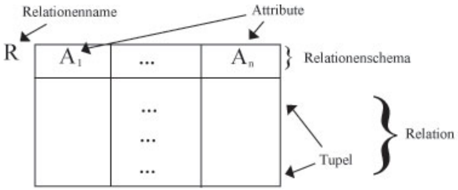
Kapitel 3

Relationen und Prädikatenlogik



Inhalt

3. Relationen und Prädikatenlogik
   - Relationen und Funktionen
   - Prädikatenlogik

Kartesisches Produkt

Definition 3.1

Für Mengen $A_1, \ldots, A_n, n \geq 1$ heißt die Menge

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}$$

n-stelliges kartesisches Produkt von $A_1, \ldots, A_n$.

Anstelle von $A_1 \times \cdots \times A_n$ schreiben wir auch $\bigtimes_{i=1}^{n} A_i$.

$(x_1, \ldots, x_n)$ heißt *n*-Tupel. Ein 2-Tupel heißt auch Paar, ein 3-Tupel Tripel und ein 4-Tupel Quadrupel.

$x_i, 1 \leq i \leq n$ heißt die *i*-te Komponente von $(x_1, \ldots, x_n)$.

Bemerkung:

- Falls $A_i = \emptyset$ für mindestens ein $i, 1 \leq i \leq n$, dann gilt $\bigtimes_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$.

Beispiel 3.2

Für die Mengen $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$ und $C = \{2, 3\}$ ist

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\} \\ A \times B \times C &= \{(1, a, 2), (1, a, 3), (1, b, 2), (1, b, 3), (1, c, 2), (1, c, 3), \\ &\quad (2, a, 2), (2, a, 3), (2, b, 2), (2, b, 3), (2, c, 2), (2, c, 3)\} \end{aligned}$$

Folgerung 3.3

Ist $|A_i| < \infty$ für $1 \leq i \leq n$, dann gilt

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

n-faches kartesisches Produkt

Definition 3.4

Sind alle A_i identisch, also $A_i = A$ für $1 \leq i \leq n$, dann heißt

$$A_1 \times \cdots \times A_n = A \times \cdots \times A$$

n-faches kartesisches Produkt von A.

Abkürzend benutzen wir für das n-fache kartesische Produkt auch die Potenzschreibweise:

$$A^n = A \times \cdots \times A$$

Folgerung 3.5

Für A mit $|A| < \infty$ gilt $|A^n| = |A|^n$.

Teilmenge

Definition 3.6

Eine Menge A ist Teilmenge einer Menge B, falls jedes Element von A auch Element von B ist, d. h. wenn

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

gilt. Wir schreiben hierfür $A \subseteq B$. B heißt dann auch Obermenge von A.

Zwei Mengen A, B sind gleich, wenn jede Teilmenge der anderen ist, also wenn

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

gilt. Wir schreiben dann $A = B$. Sind zwei Mengen nicht gleich, schreiben wir $A \neq B$.
Eine Menge A ist eine echte Teilmenge von B (Schreibweise $A \subset B$), wenn gilt:

$$A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Beispiel 3.7

Es gilt:

(i) $\{2,3,4,7\} \subseteq \{1,2,3,4,7,13\}$

(ii) $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$ und $\{1,2,3\} \subseteq \{3,2,1\}$.

(iii) $\{2,3,4,7\} \subset \{1,2,3,4,7,13\}$

Beziehungen zwischen Mengen

Satz 3.8

(i) *Für jede Menge A gilt $\emptyset \subseteq A$.*

(ii) *Für jede Menge A gilt $A \subseteq A$.*

(iii) *Seien A, B, C Mengen. Dann gilt:*

$$A \subseteq B \land B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

Beweis.

(i) Nach Definition müssen wir

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

zeigen. Diese Implikation gilt genau dann, wenn die Subjunktion

$$x \in \emptyset \rightarrow x \in A$$

eine Tautologie ist, also immer wahr. Da $x \in \emptyset$ immer falsch ist, ist diese Subjunktion immer erfüllt.

(ii) $x \in A \rightarrow x \in A$ ist eine Tautologie, also gilt $x \in A \Rightarrow x \in A$ und damit gemäß der Teilmengendefintion $A \subseteq A$.

(iii) Mit dem Kettenschluss ergibt sich

$$(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C) \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C)$$

Relation

Definition 3.9

Jede Teilmenge $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$ heißt *n-stellige Relation* über $A_1, \ldots, A_n$.

Sind alle Mengen A_i identisch, dann heißt R homogen, sonst heterogen.

Bei einer n-stelligen homogenen Relation $R \subseteq A \times \ldots \times A$ heißt A auch die Grundmenge von R.

Beispiel 3.10

Es sei $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

(i) Für $R_1 = \{(x, y) \in A \times A | x \cdot y > 2\} \subseteq A \times A$ gilt

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(-3,-3), (-3,-2), (-3,-1), (-2,-3), (-2,-2), \\ &\quad (-1,-3), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}. \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

(ii) Für $R_2 = \{(x,y,z) \in A^3 | x + y = z\}$ gilt

$$
\begin{aligned}
R_2 = \; & \{(-3,0,-3),(-3,1,-2),(-3,2,-1),(-3,3,0),\\
& (-2,-1,-3),(-2,0,-2),(-2,1,-1),(-2,2,0),(-2,3,1),\\
& (-1,-2,-3),(-1,-1,-2),(-1,0,-1),(-1,1,0),\\
& (-1,2,1),(-1,3,2),\\
& (0,-3,-3),(0,-2,-2),(0,-1,-1),(0,0,0),(0,1,1),\\
& (0,2,2),(0,3,3),\\
& (1,-3,-2),(1,-2,-1),(1,-1,0),(1,0,1),(1,1,2),(1,2,3),\\
& (2,-3,-1),(2,-2,0),(2,-1,1),(2,0,2),(2,1,3),\\
& (3,-3,0),(3,-2,1),(3,-1,2),(3,0,3)\}
\end{aligned}
$$

R_1 und R_2 sind homogene Relationen.

Darstellung Relationen durch Matrizen

Endliche zweistellige Relationen $R \subseteq A \times B$ lassen sich auch als Boolsche Matrizen darstellen:

- Die Zeilen werden mit den Elementen aus $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ gekennzeichent,
- die Spalten mit den Elementen aus $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$.
- Gilt $(a_i, b_j) \in R$, dann steht in Spalte i und Zeile j eine 1, ansonsten eine 0.

Beispiel 3.11

Die Relation R_1 von Beispiel 3.10 als Boolsche Matrix:

	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	1	1	1	0	0	0	0
-2	1	1	0	0	0	0	0
-1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	1	1	1

Rechtseindeutige und totale Relationen

Definition 3.12

Eine zweistellige Relation $R \subseteq A \times B$ heißt rechtseindeutig, wenn gilt

$$(x_1, y_1) \in R \land (x_2, y_2) \in R \land (y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2).$$

Anschaulich: Für jedes $x \in A$ gibt es höchstens ein $y \in B$, so dass $(x, y) \in R$ gilt.

R heißt total, wenn gilt: Für alle $x \in A$ existiert ein $y \in B$ mit $(x, y) \in R$.
Anschaulich: Für jedes $x \in A$ gibt es mindestens ein $y \in B$, so dass $(x, y) \in R$ gilt.

Alternative Bedingung für die Rechtseindeutigkeit:

$$(x_1, y_1) \in R \land (x_2, y_2) \in R \land (x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2)$$

Beispiel 3.13

- Die Relation
$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | y = x^2\}$$
ist rechtseindeutig und total, denn für jedes $x \in \mathbb{N}$ ist x^2 eindeutig definiert: Für jedes $x \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{N}$ mit $y = x^2$.
- Die Relation
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | y \leq x\}$$
ist nicht rechtseindeutig. Beispielsweise gilt sowohl $(3, 1) \in R_2$ als auch $(3, 2) \in R_2$.
- Die Relation
$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} | y = \frac{1}{x}\}$$
ist zwar rechtseindeutig, aber nicht total, denn für $x = 0$ gibt es kein entsprechendes y.

Funktion

Definition 3.14

Eine zweistellige, totale, rechtseindeutige Relation $f \subseteq A \times B$ heißt Funktion oder Abbildung.

Die Menge A ist der Definitionsbereich der Funktion f, die Menge B der Wertebereich.

Bei Funktionen schreibt man anstelle von $f \subseteq A \times B$ auch

$$f : A \to B$$

bzw. mit Funktionsvorschrift

$$f : A \to B, x \mapsto f(x)$$

und anstelle von $(x, y) \in f$ schreibt man

$$y = f(x).$$

Beispiel 3.15

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x + 1$. Dann ist f als Relation

$$f = \{(1,2),(2,3),(3,4),\ldots\}.$$

also

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, \ldots$$

Definitions- und Wertebereich von f sind jeweils die natürlichen Zahlen.