Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Mathematische Grundlagen (2. Musterklausur)

Klausur Wintersemester 2015/16

16. März 2015

Name: **Vorname:**

Matrikelnr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreicht							

Hinweise:

- Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sie müssen Ihre Antworten begründen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) $(p \to q) \to r \equiv (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

(b) Die Menge $\mathcal{F} = \{r \to q, p \to r, q \to p, \neg p\}$ ist erfüllbar.

(c) $p \to (1 \vee p)$ ist eine Tautologie.

(d) $\{r \vee p \vee q, \neg q \vee p \vee r, \neg p\} \models r$

Lösung: Ich gebe jeweils mehrere Beweismöglichkeiten an.

(a) Beweis mit Wahrheitstafel:

p	q	r	$(p \to q) \to r$	$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Beweis durch Umformung:

$$(p \to q) \to r \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee r \equiv (p \wedge \neg q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

(b) Beweis mit Wahrheitstafel: Es genügt, eine Belegung zu finden, die alle Aussagen von $\mathcal{F}$ wahr macht.

p	q	r	$r \to q$	$p \to r$	$q \to p$	$\neg p$
0	0	0	1	1	1	1

(c) Beweis mit Wahrheitstafel:

p	$p \to (1 \vee p)$
0	$\mathcal{I}(0 \to (1 \vee 0)) = \mathcal{I}(0 \to 1) = 1$
1	$\mathcal{I}(1 \to (1 \vee 1)) = \mathcal{I}(1 \to 1) = 1$

Beweis durch Umformung:

$$p \to (1 \vee p) \equiv \neg p \vee (1 \vee p) \equiv 1$$

(d) Beweis mit Wahrheitstafel:

p	q	r	$r \vee p \vee q$	$\neg q \vee p \vee r$	$\neg p$	Modell?	r
0	0	0	0			$-$	
0	0	1	1	1	1	$+$	1
0	1	0		0		$-$	
0	1	1	1	1	1	$+$	1
1	0	0			0	$-$	
1	0	1			0	$-$	
1	1	0			0	$-$	
1	1	1			0	$-$	

Beweis mit Resolution:

$\mathrm{res}(\{p, q, r\}, \{\neg p\}) = \{q, r\}$

$\mathrm{res}(\{p, \neg q, r\}, \{\neg p\}) = \{\neg q, r\}$

$\mathrm{res}(\{q, r\}, \{\neg q, r\}) = \{r\}$

Aufgabe 2 (4+4+2=10 Punkte)

Inspektor Columbo muss einen Einbruch aufklären. Er weiß:

1. Hans, Klaus oder Jupp haben den Einbruch begangen.
2. Jupp arbeitet immer zusammen mit Klaus und Hans.
3. Wenn Hans nicht dabei war, war auch Klaus nicht am Einbruch beteiligt.
4. Mindestens einer der drei war nicht an dem Einbruch beteiligt.

(a) Formulieren Sie die Aussagen 1. bis 4. in Aussagenlogik und stellen Sie die zugehörigen Klauselmengen auf.

(b) Zeigen Sie mittels Resolution, dass Hans ein Täter ist.

(c) War Jupp am Einbruch beteiligt? War Klaus am Einbruch beteiligt?

Lösung:

(a) Wir nutzen die Variablen x_H, x_K, x_J. Sie seien genau dann wahr, wenn Hans, Klaus bzw. Jupp am Einbruch beteiligt waren.

1. $x_H \vee x_K \vee x_J$, $K_1 = \{x_H, x_J, x_K\}$
2. $x_J \to (x_H \wedge x_K) \equiv \neg x_J \vee (x_H \wedge x_K) \equiv (\neg x_J \vee x_H) \wedge (\neg x_J \vee x_K)$,
   $K_2 = \{x_H, \neg x_J\}$, $K_3 = \{\neg x_J, x_K\}$
3. $\neg x_H \to \neg x_K \equiv x_H \vee \neg x_K$, $K_4 = \{x_H, \neg x_K\}$
4. $\neg x_H \vee \neg x_K \vee \neg x_J$, $K_5 = \{\neg x_H, \neg x_J, \neg x_K\}$

(b) Hypothese: x_H, negierte Hypothese: $\neg x_H$, $K_6 = \{\neg x_H\}$

$K_7 = \text{res}(K_1, K_2) = \{x_H, x_K\}$

$K_8 = \text{res}(K_4, K_7) = \{x_H\}$

$K_9 = \text{res}(K_6, K_8) = \diamond$

(c) Für $\mathcal{I}(x_J) = 1$ sind die Aussagen 2. und 4. nicht gleichzeitig erfüllbar. Also kann es kein Modell mit $\mathcal{I}(x_J) = 1$ geben, also war Jupp nicht am Einbruch beteiligt.

Klaus muss wegen Mangels an Beweisen freigesprochen werden, denn es gibt sowohl ein Modell, in dem Klaus unschuldig ist ($\mathcal{I}(x_H) = 1, \mathcal{I}(x_J) = \mathcal{I}(x_K) = 0$), als auch ein Modell, in dem Klaus schuldig ist ($\mathcal{I}(x_H) = 1, \mathcal{I}(x_J) = 0, \mathcal{I}(x_K) = 1$).

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

(b) Die Menge M ist durch die folgenden Regeln definiert:

(i) $7 \in M$

(ii) Gilt $x \in M$, dann gilt auch $3x+1 \in M$ und $7x \in M$.

(iii) M enthält genau die Elemente, die durch die Regeln (i) und (ii) gebildet werden können.

Zeigen Sie: $\forall x \in M \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k+1$

Lösung:

(a) $n = 1:$

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$$

$n \to n+1:$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= (n+1)(n+2)(n+3) + \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} (n+1)(n+2)(n+3) + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \\
&= \frac{4(n+1)(n+2)(n+3) + n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}
\end{aligned}$$

(b) Da die Menge M rekursiv definiert ist, nutzen wir hier die strukturelle Induktion als Spezialfall der vollständigen Induktion.

Induktionsanfang: $7 = 3 \cdot 2 + 1$, also stimmt die Aussage (mit $k = 2$).

Induktionsschritt: Sei $x \in M$. Nach I.V. existiert somit $k \in \mathbb{N}$ mit $x = 3k+1$. Damit folgt:

$$3x + 1 = 3(3k+1) + 1 = 3k' + 1 \text{ mit } k' = 3k+1$$

und

$$7x = 7(3k+1) = 21k + 7 = (21k+6) + 1 = 3(7k+2) + 1 = 3k'' + 1 \text{ mit } k'' = 7k+2$$

Also gilt die Aussage auch für $3x+1$ und $7x$.

Aufgabe 4 (4+3+3=10 Punkte)

Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5)\} \subseteq A \times A$.

(a) Geben Sie R^+ und R^* an.

(b) Ist R^* eine partielle Ordnung? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Geben Sie eine Äquivalenzrelation auf A mit genau zwei Äquivalenzklassen an.

Lösung:

(a)

$$R^+ = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

$$R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5)\}$$

(b) Ja, R^* ist eine partielle Ordnung. Eine partielle Ordnung ist eine Relation, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

- Weil R^* die Relation $R^0 = \mathrm{id}_A$ enthält, ist R^* reflexiv.
- Weil R nur Paare (x, y) mit $x \leq y$ enthält, gilt dies auch für alle R^k und somit auch für R^*. Also ist R^* antisymmetrisch.
- R^* ist als reflexiv-transitive Hülle insbesondere auch transitiv.

(c)

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

Die beiden Äquivalenzklassen sind hier $\{1, 2\}$ und $\{3, 4, 5\}$. Dies ist aber natürlich nicht die einzige Lösung.

Aufgabe 5 (5+5=10 Punkte)

(a) Sei $f : M \to N$, $B_1, B_2 \subseteq N$. Zeigen Sie:

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{für } x \geq 0 \\ x - 3 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

(b) f ist nicht surjektiv. Beweis:

- $x \geq 0$

$$x \geq 0 \Rightarrow x + 3 \geq 3 \Rightarrow f(x) \geq 3$$

- $x < 0$

$$x < 0 \Rightarrow x - 3 < -3 \Rightarrow f(x) < -3$$

Also existiert z. B. für $y = 0$ kein x mit $f(x) = y = 0$.

f ist injektiv. Beweis: Z. Z.: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. O.B.d.A. gelte $x_1 < x_2$. Wir unterscheiden drei Fälle:

- $x_1 < x_2 < 0$

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- $x_1 < 0 \leq x_2$

$$x_1 < 0 \leq x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 < x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- $0 \leq x_1 < x_2$

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 3 < x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Aufgabe 6 (5+5=10 Punkte)

Zeigen Sie:

(a)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

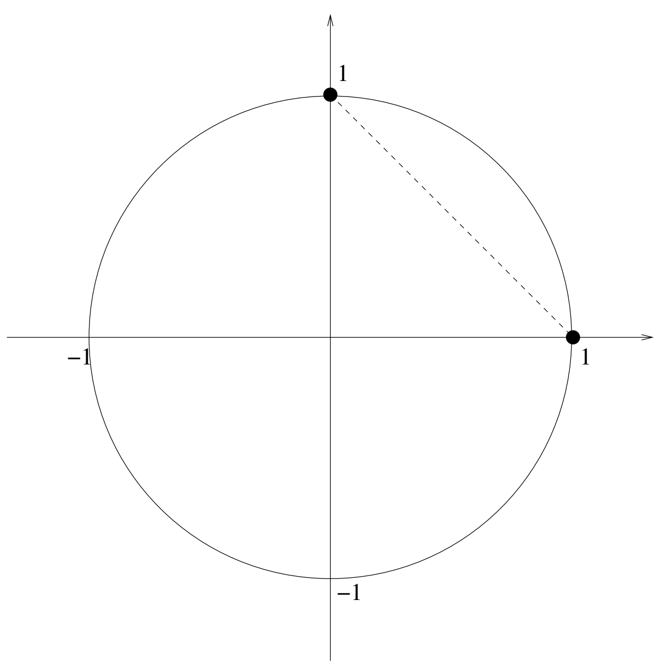
(b) Unter je fünf Punkten, die in einem Kreis mit Radius $r = 1$ liegen, gibt es stets zwei, die einen Abstand $\leq \sqrt{2}$ haben.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \\
&= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{(k+n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

(b) Wenn wir den Mittelpunkt eines Kreises mit Radius $r = 1$ auf den Koordinatenurpsung legen, wird der Kreis druch die Koordinatenachsen in vier kongruente Teile zerlegt. Der größte Abstand zweier Punkte in einem Teil ist durch die beiden Schnittpunkte des Kreises mit den Koordinatenachsen bestimmt. Dieser Abstand beträgt $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.



Jetzt nutzen wir das Schubfachprinzip. Wir haben fünf Punkte, die sich in vier Teilen befinden. Nach dem Schubfachprinzip muss es also mindestens einen Teil geben, der mindestens zwei der fünf Punkte enthält. Da diese zwei Punkte im gleichen Teil sind, haben sie einen Abstand $\leq \sqrt{2}$.