Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Mathematische Grundlagen (1. Musterklausur)

Klausur Wintersemester 2015/16

16. März 2015

Name:

Vorname:

Matrikelnr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreicht							

Hinweise:

- Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sie müssen Ihre Antworten begründen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2=10 Punkte)

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $p \vee (q \to \neg p)$ ist eine Tautologie.

(b) $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

(c) Wenn α und β widerspruchsvoll sind, dann ist $\alpha \to \beta$ eine Tautologie.

(d) $\{\neg\alpha\} \models \alpha \to \beta$

(e) $\{\alpha \to \beta\} \not\models \beta$

Lösung: Alle Aussagen sind wahr. Wir müssen also nur noch jede Aussage begründen (beweisen). Wir können diese Aussagen immmer durch eine korrekte Anwendung von Wahrheitstafeln begründen. Im Folgenden einige alternative Begründungen.

(a)

$$p \vee (q \to \neg p) \equiv p \vee (\neg q \vee \neg p) \equiv (p \vee \neg p) \vee \neg q \equiv 1 \vee \neg q \equiv 1$$

(b)

$$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv \neg\neg p \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg q$$

(c)

$$\mathcal{I}^*(\alpha \to \beta) = \mathcal{I}^*(\neg\alpha \vee \beta) = \max\{\mathcal{I}^*(\neg\alpha), \mathcal{I}^*(\beta)\} = \max\{1 - \mathcal{I}^*(\alpha), \mathcal{I}^*(\beta)\} = \max\{1-0, 0\} = 1$$

Weitere Alternative: Wenn α und β widerspruchsvoll sind, dann gilt für jede Belegung $\mathcal{I}^*(\alpha) = \mathcal{I}^*(\beta) = 0$. $0 \to 0$ ist aber wahr, somit liefert jede Belegung von α und β für $\alpha \to \beta$ eine wahre Aussage. Also ist $\alpha \to \beta$ eine Tautologie.

(d) Für ein Modell von $\{\neg\alpha\}$ muss $\mathcal{I}^*(\neg\alpha) = 1$ und somit $\mathcal{I}^*(\alpha) = 0$ gelten. $0 \to \beta$ ist aber immer wahr, somit ist ein Modell für $\{\neg\alpha\}$ auch stets ein Modell für $\alpha \to \beta$.

(e) Eine Belegung mit $\mathcal{I}^*(\alpha) = \mathcal{I}^*(\beta) = 0$ ist ein Modell für $\{\alpha \to \beta\}$, aber kein Modell für β.

Aufgabe 2 (4+6=10 Punkte)

Gegeben Sei die Formelmenge $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ mit:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & b \to a \\ \alpha_2 & = & \neg b \to (c \vee d) \\ \alpha_3 & = & a \to c \end{array}$$

(a) Überführen Sie die Formeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in KNF und geben Sie die zugehörigen Klauseln an.

(b) Zeigen Sie mittels Resolution: $\mathcal{F} \models \neg d \to c$

Lösung:

(a) $b \to a \equiv \neg b \vee a,\ K_1 = \{a, \neg b\}$

$\neg b \to (c \vee d) \equiv b \vee c \vee d,\ K_2 = \{b, c, d\}$

$a \to c \equiv \neg a \vee c,\ K_3 = \{\neg a, c\}$

(b) $\neg(\neg d \to c) \equiv \neg(d \vee c) \equiv \neg d \wedge \neg c,\ K_4 = \{\neg d\},\ K_5 = \{\neg c\}$

$$\begin{array}{rcl} K_6 & = & \mathrm{Res}(K_1, K_2) = \{a, c, d\} \\ K_7 & = & \mathrm{Res}(K_3, K_6) = \{c, d\} \\ K_8 & = & \mathrm{Res}(K_4, K_7) = \{c\} \\ K_9 & = & \mathrm{Res}(K_5, K_8) = \diamond \end{array}$$

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

(a) Gegeben Sei die Formelmenge $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \exists y \, \forall x \, P(x,y) \\ \alpha_2 &= \forall x \, \forall y P(x,y) \to P(y,x) \\ \alpha_3 &= P(a,b) \wedge P(b,c) \wedge \neg P(a,c) \end{aligned}$$

Das Universum sei $U = \{a, b, c\}$. Geben Sie ein Modell für die Formelmenge $\mathcal{F}$ an.

(b) Gegeben seien zwei Mengen P, Q. Die Zugehörigkeit eines Element x des Universums zu einer dieser Mengen drücken wir durch $P(x)$ bzw. $Q(x)$ aus. Formulieren Sie damit in Prädikatenlogik die folgenden Sachverhalte.

(i) P ist Teilmenge von Q.

(ii) P und Q sind disjunkt.

(iii) Jedes Element des Universums ist in mindestens einer der beiden Mengen.

(iv) Wenn $a \in P$ gilt, dann ist Q nicht die leere Menge.

Lösung:

(a) $P = \{(a,b), (b,c), (b,a), (c,b), (b,b)\}$

Die Angabe dieser Menge hätte genügt, um die Aufgabe zu lösen.

Hinweise zur Konstruktion:

- Aus α_3 folgt, dass $(a,b), (b,c) \in P$ und $(a,c) \notin P$ gelten muss.
  Wir setzen $P = \{(a,b), (b,c)\}$.
- α_2 entspricht der Symmetrie. Also muss für ein Modell auch $(b,a), (c,b) \in P$ und $(c,a) \notin P$ gelten.
  Daher erweitern wir P zu $P = \{(a,b), (b,c), (b,a), (c,b)\}$.
- Noch ist α_1 nicht erfüllt. Für y in α_1 kommen aber a (wegen $(c,a) \notin P$) und c (wegen $(a,c) \notin P$) nicht in Frage. Bleibt also nur noch b und um α_1 zu erfüllen. Für b fehlt dann noch das Paar (b,b).
  Also: $P = \{(a,b), (b,c), (b,a), (c,b), (b,b)\}$.

(b) (i) $\forall x \, (P(x) \to Q(x))$

(ii) $\forall x \, (\neg(P(x) \wedge Q(x))) \equiv \forall x \, (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$

(iii) $\forall x \, (P(x) \vee Q(x))$

(iv) $P(a) \to (\exists x \, Q(x))$

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : 8|(9^n - 1)$

Lösung:

(a) $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

(b) $n = 1$: $9^1 - 1 = 8$, also $8|9^1 - 1$.

$n \to n+1$:
Induktionsvoraussetzung: $8|(9^n - 1)$, d. h.: $\exists k \in \mathbb{N} : 8k = 9^n - 1$.

$$\begin{aligned}
9^{n+1} - 1 &= (9^{n+1} - 9) + (9 - 1) \\
&= 9(9^n - 1) + 8 \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} 9 \cdot 8k + 8 \\
&= 8(9k + 1)
\end{aligned}$$

Also existiert $k' = 9k + 1 \in \mathbb{N}$ mit $8k' = 9^{n+1} - 1$. Damit gilt $8|9^{n+1} - 1$.

Aufgabe 5 (2+2+2+2+2=10 Punkte)

Sind die folgenden Relationen R_i auf der Menge $M = \{a, b, c\}$ eine Äquivalenzrelation oder eine partielle Ordnung? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $R_1 = \emptyset$

(b) $R_2 = M \times M$

(c) $R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c)\}$

(d) $R_4 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$

(e) $R_5 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

Lösung:

(a) R_1 ist nicht reflexiv und damit weder eine Äquivalenzrelation noch eine partielle Ordnung.

(b) Da R_2 alle möglichen Paare über M enthält, ist R_2 reflexiv, symmetrisch und transitiv und somit eine Äquivalenzrelation.

R_2 ist keine partielle Ordnung, da nicht antisymmetrisch. Beispielsweise gilt sowohl $(a, b) \in R_2$ als auch $(b, a) \in R_2$.

(c) R_3 ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv und somit eine partielle Ordnung.

Wegen $(c, a), (c, b) \notin R_3$ ist R_3 nicht symmetrisch und somit keine Äquivalenzrelation.

(d) R_4 ist reflexiv, symmetrisch und transitiv und somit eine Äquivalenzrelation.

Wegen $(a, c) \in R_4$ und $(c, a) \in R_4$ ist R_4 nicht antisymmetrisch und somit keine partielle Ordnung.

(e) R_5 ist reflexiv und transitiv. Da R_5 ausschließlich aus den reflexiven Elementen besteht, ist die Relation sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch. Somit ist R_5 sowohl Äquivalenzrelation als auch partielle Ordnung.

Aufgabe 6 (6+4=10 Punkte)

(a) Sei $f : M \to N$, $A_1, A_2 \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (x + y)(x - y)$$

Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \exists x : x \in A_1 \cup A_2 \wedge f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \exists x : (x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \exists x : (x \in A_1 \wedge f(x) = y) \vee (x \in A_2 \wedge f(x) = y) \\
&\Leftrightarrow (\exists x : x \in A_1 \wedge f(x) = y) \vee (\exists x : x \in A_2 \wedge f(x) = y) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in A_1 : f(x) = y) \vee (\exists x \in A_2 : f(x) = y) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2)
\end{aligned}$$

(b)

- f ist surjektiv.
  Beweis: zu zeigen: $\forall z \in \mathbb{R} \exists (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : f(x, y) = z$
  Fallunterscheidung:
  * $z \geq 0$
    Wähle $x = \sqrt{z}$ und $y = 0$. Damit gilt:
    $$f(x, y) = f(\sqrt{z}, 0) = \sqrt{z} \cdot \sqrt{z} = z$$
  * $z < 0$
    Wähle $x = 0$ und $y = \sqrt{-z}$. Damit gilt:
    $$f(x, y) = f(0, \sqrt{-z}) = \sqrt{-z} \cdot (-\sqrt{-z}) = -(-z) = z$$
- f ist nicht injektiv.
  Beweis:
  $$f(0, 0) = 0 = (1 + 1) \cdot (1 - 1) = f(1, 1)$$
  Also gibt es zwei unterschiedliche Elemente des Definitionsbereichs (nämlich $(0, 0)$ und $(1, 1)$), die auf den gleichen Funktionswert abgebildet werden. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität.