Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Mathematische Grundlagen (1. Musterklausur)

Klausur Wintersemester 2015/16

16. März 2015

Name: **Vorname:**

Matrikelnr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreicht							

Hinweise:

- Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sie müssen Ihre Antworten begründen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2=10 Punkte)

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $p \lor (q \to \neg p)$ ist eine Tautologie.

(b) $\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$

(c) Wenn α und β widerspruchsvoll sind, dann ist $\alpha \to \beta$ eine Tautologie.

(d) $\{\neg\alpha\} \models \alpha \to \beta$

(e) $\{\alpha \to \beta\} \not\models \beta$

Aufgabe 2 (4+6=10 Punkte)

Gegeben Sei die Formelmenge $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ mit:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= b \rightarrow a \\ \alpha_2 &= \neg b \rightarrow (c \vee d) \\ \alpha_3 &= a \rightarrow c \end{aligned}$$

(a) Überführen Sie die Formeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in KNF und geben Sie die zugehörigen Klauseln an.

(b) Zeigen Sie mittels Resolution: $\mathcal{F} \models \neg d \rightarrow c$

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

(a) Gegeben Sei die Formelmenge $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \exists y\, \forall x\, P(x,y) \\ \alpha_2 &= \forall x\, \forall Y\, P(x,y) \to P(y,x) \\ \alpha_3 &= P(a,b) \wedge P(b,c) \wedge \neg P(a,c) \end{aligned}$$

Das Universum sei $U = \{a, b, c\}$. Geben Sie ein Modell für die Formelmenge $\mathcal{F}$ an.

(b) Gegeben seien zwei Mengen P, Q. Die Zugehörigkeit eines Element x des Universums zu einer dieser Mengen drücken wir durch $P(x)$ bzw. $Q(x)$ aus. Formulieren Sie damit in Prädikatenlogik die folgenden Sachverhalte.

(i) P ist Teilmenge von Q.

(ii) P und Q sind disjunkt.

(iii) Jedes Element des Universums ist in mindestens einer der beiden Mengen.

(iv) Wenn $a \in P$ gilt, dann ist Q nicht die leere Menge.

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : 8 | (9^n - 1)$

Aufgabe 5 (2+2+2+2+2=10 Punkte)

Sind die folgenden Relationen R_i auf der Menge $M = \{a, b, c\}$ eine Äquivalenzrelation oder eine partielle Ordnung? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $R_1 = \emptyset$

(b) $R_2 = M \times M$

(c) $R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, c)\}$

(d) $R_4 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$

(e) $R_5 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

Aufgabe 6 (6+4=10 Punkte)

(a) Sei $f : M \to N$, $A_1, A_2 \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (x + y)(x - y)$$

Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.