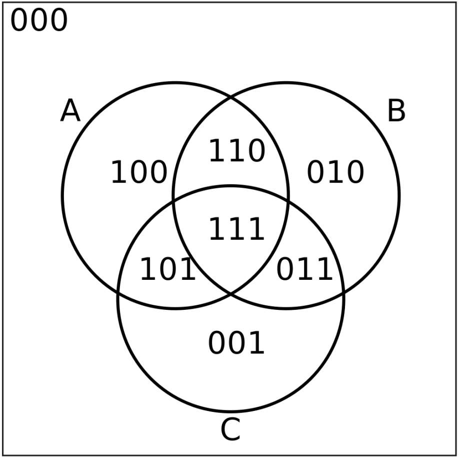
Kapitel 1

Mengen



Inhalt

Ein Mengenbegriff

- In der Mathematik dient der Begriff der Menge dazu, Objekte zu einer neuen Einheit zusammenzufassen,
- so dass diese Einheit als (neues) Ganzes betrachtet und weiterverwendet werden kann.

Festlegung: Cantorscher Mengenbegriff

Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Dinge unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.

Georg Cantor

Georg Cantor (1845-1918) war ein deutscher Mathematiker.

Cantor lieferte wichtige Beiträge zur modernen Mathematik. Insbesondere ist er der Begründer der Mengenlehre und veränderte den Begriff der Unendlichkeit.

Darstellung von Mengen

Die Notation einer Menge erfolgt in der Art

$$\{\ldots\}$$

Die Elemente der Menge werden durch die Mengenklammern $\{$ und $\}$ zu einem Ganzen zusammengefasst.

„. . .“ ist ein Platzhalter und steht für die eindeutige Festlegung, welche Dinge Elemente der Menge sind (dazu später mehr).

Wir können Mengen einen Namen geben. Dies erfolgt mithilfe eines Gleichheitszeichens:

$$M = \{\ldots\}$$

Element

Ist ein Ding a Element einer Menge M, dann schreiben wir

$$a \in M$$

Ist ein Ding a kein Element einer Menge M, dann schreiben wir

$$a \notin M$$

Für mehrere Elemente vereinbaren wir abkürzende Schreibweisen.

$$a, b, c \in M$$

bedeutet $a \in M$ und $b \in M$ und $c \in M$. Analog bedeutet

$$a, b, c \notin M$$

dass $a \notin M$ und $b \notin M$ und $c \notin M$ gilt.

Schachtelung und leere Menge

Anschaulich kann man sich Mengen als Behälter, z. B. als Schachteln, vorstellen. Die Schachtel wird durch die Mengenklammern dargestellt.

Genau wie Schachteln weitere Schachteln enthalten können, kann auch eine Menge weitere Mengen enthalten.

Und genau wie eine Schachtel leer sein kann, kann auch eine Menge leer sein.

Die leere Menge wird durch $\{\,\}$ oder durch $\emptyset$ dargestellt.

Ist die Menge M leer, so notieren wir $M = \emptyset$ (oder $M = \{\,\}$).

Offensichtlich gilt $a \notin \emptyset$ für jedes Ding a.

Beispiele zur Notation

Beispiel 1.1

(i) Die Menge

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

enthält als Elemente die Zahlen $1, 2, 3, 4$ und 5. Es gilt also z. B. $2, 5 \in A$ sowie $0, 6, 13 \notin A$.

(ii) Die Menge

$$B = \{1, 2, \{3, 4, 5, 6\}\}$$

enthält drei Elemente: die Zahlen 1 und 2 sowie die Menge $C = \{3, 4, 5, 6\}$, die selbst vier Elemente enthält. Wir könnten auch

$$B = \{1, 2, C\}$$

schreiben.

Fortsetzung Beispiel.

(iii) Die Menge

$$D = \{\{\,\}\}$$

enthält genau ein Element, nämlich die leere Menge. Somit ist die Menge D selbst nicht leer.

Schachtelmetapher: Die Schachtel D ist nicht leer, denn sie enthält ein Element, die leere Schachtel.

Es gilt $\{\,\} \in D$.

Wenn wir $E = \{\,\}$ setzen, dann ist

$$D = \{E\}$$

wodurch auch in der mathematischen Notation deutlich wird, dass D nicht die leere Menge ist.

Darstellung von Mengen

Unsere Festlegung des Mengenbegriffs besagt, dass die Elemente einer Menge bestimmt sein müssen.

Dazu verwenden wir zwei Arten der Darstellung von Mengen:

- aufzählende Darstellung

  Bei der aufzählenden Darstellung werden die Elemente einer Menge wie in Beispiel 1.1 explizit angegeben.
- beschreibende Darstellung

  Bei der beschreibenden Darstellung werden die Elemente nicht explizit aufgezählt, sondern es wird eine definierende Eigenschaft angegeben.

Aufzählende Darstellung

Beispiel 1.2

$$
\begin{aligned}
A &= \{2, 3, 5, 7, 11\} \\
B &= \{1, 2, \ldots, 50\} \\
C &= \{1, 2, \ldots\} \\
D &= \{43, 44, \ldots\}
\end{aligned}
$$

Die Menge A enthält fünf Element, nämlich die Primzahlen kleiner gleich 11.

Bei den drei anderen Mengen wird ein Problem der aufzählenden Darstellung von Mengen eutlich: Für welche Elemente steht „. . .“?

Bei B sind vermutlich die natürlichen Zahlen von 1 bis 50 gemeint, bei C die natürlichen Zahlen und bei D die natürlichen Zahlen größer gleich 43.

Die allgemeine Form der aufzählenden Darstellung von Mengen ist also

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

für endliche Mengen sowie

$$M = \{a_1, a_2, \ldots\}$$

für unendliche Mengen.

Beschreibende Darstellung

Bei der beschreibenden Darstellung werden die Elemente nicht explizit aufgezählt, sondern es wird eine definierende Eigenschaft angegeben.

Die allgemeine Form ist

$$M = \{x | p(x)\}$$

- Dabei ist x ein Platzhalter (eine Variable) für die Elemente der Menge,
- und $p(x)$ ist eine für x (informal oder formal) angegebene Eigenschaft.
- Genau die Dinge x, die die Eigenschaft $p(x)$ erfüllen, sind Elemente der Menge.
- Für die formale Definition solch einer Eigenschaft nutzen wir später die Prädikatenlogik.

Beispiel 1.3

$$\begin{aligned}
A &= \{x | x \text{ ist eine Primzahl kleiner gleich } 11\} \\
B &= \{x | x \text{ ist eine positive ganze Zahl und } x + x = 10\} \\
C &= \{(x, y) | x \text{ und } y \text{ sind positive ganze Zahlen und } x + y = 6\} \\
T_{64} &= \{y | y \text{ ist ein positiver Teiler von } 64\} \\
S &= \{st | st \text{ studiert Informatik an der Hochschule Bonn-Rhein-Sieg}\}
\end{aligned}$$

Aufzählende Darstellung für die ersten vier Mengen: ✎

Kardinalität

Enthält eine Menge M endlich viele Elemente, etwa m Stück, dann schreiben wir

$$|M| = m$$

und nennen M eine endliche Menge.

$|M|$ heißt die Kardinalität von M.

Nicht endliche Mengen heißen unendlich, und wir notieren

$$|M| = \infty.$$

Offensichtlich gilt

$$|\emptyset| = 0.$$

Bezeichner für Zahlenmengen

Natürliche Zahlen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	natürliche Zahlen mit 0
$\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$	natürliche Zahlen ab k, $k \in \mathbb{N}_0$
$\mathbb{N}_{u,o} = \{u, u+1, u+2, \ldots, o\}$	natürliche Zahlen zwischen u und o
$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$	Primzahlen

Ganze Zahlen:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{G}_+ = \{0, 2, 4, \ldots\}$	nicht negative gerade Zahlen
$\mathbb{G}_- = \{-2, -4, \ldots\}$	negative gerade Zahlen
$\mathbb{G} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$	gerade Zahlen
$\mathbb{U}_+ = \{1, 3, 5, \ldots\}$	positive ungerade Zahlen
$\mathbb{U}_- = \{-1, -3, -5, \ldots\}$	negative ungerade Zahlen
$\mathbb{U} = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$	ungerade Zahlen

Rationale, reelle und komplexe Zahlen:

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle\vert\, p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \right\}$	rationale Zahlen (Brüche)
$\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_-$	rationale Zahlen größer gleich/kleiner 0
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$	reelle Zahlen/größer gleich/kleiner 0
$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \vert a, b, \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^2 = -1\}$	komplexe Zahlen

Paradoxon

Sei S die Schlange, die all diejenigen Schlangen in den Schwanz beißt, die sich nicht selbst in den Schwanz beißen.

Beißt S sich selbst in den Schwanz?

- Es gibt nur zwei Möglichkeiten: S beißt sich selbst in den Schwanz oder nicht.
- Nehmen wir an, S beiße sich in den Schwanz.
  Dann gehört sie zu den Schlangen, die sich selber in den Schwanz beißen.
  Also wird sie nicht von S in den Schwanz gebissen.
  Also beißt sich S nicht selber in den Schwanz. Widerspruch!

- Nehmen wir an, S beiße sich nicht in den Schwanz.
  Dann gehört sie zu den Schlangen, die sich nicht selber in den Schwanz beißen.
  Diese Schlangen werden aber gerade von S gebissen.
  Also beißt sich S selber in den Schwanz. Widerspruch!
- In beiden möglichen Fällen führt die jeweilige Annahme zu einem Widerspruch.
- Somit kann die Frage „Beißt S sich selbst in den Schwanz?“ nicht beantwortet werden.
- Es liegt ein sogenanntes Paradoxon vor.

Russellsche Antinomie

Wir betrachten die Menge M' aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten:

$$M' = \{A | A \notin A\}$$

Enthält M' sich selbst, also gilt $M' \in M'$?

- Annahme: $M' \in M'$
  Dann gehört M' zu den Mengen, die sich selbst enthalten.
  Daraus folgt aber nach Definition $M' \notin M'$. Widerspruch!
- Annahme: $M' \notin M'$
  Also enthält M' sich nicht selbst.
  Daraus folgt aber nach Definition $M' \in M'$. Widerspruch!
- Dieses Paradoxon ist die Russellsche Antinomie.
- Es zeigt die Unzulänglichkeit des Cantorschen Mengenbegriffs.

Diskussion zur Russellschen Antinomie

- Die Russellsche Antinomie zeigt die Unzulänglichkeit des Cantorschen Mengenbegriffs.
- Eine Mengendefinition sollte in jedem Fall die eindeutige Beantwortung der Frage ermöglichen, ob ein Ding in einer Menge enthalten ist oder nicht.

Stellt die Russellsche Antinomie die Mathematik insgesamt in Frage, da diese wesentlich auf der Mengenlehre basiert?

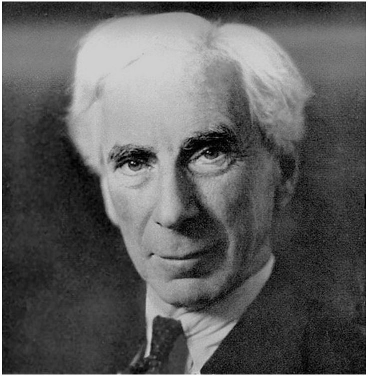
- Nein. Die axiomatische Mengenlehre vermeidet Antinomien.
- Eine axiomatische Herleitung würde aber den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.
- Für unsere Zwecke ist der Cantorsche Mengenbegriff ausreichend.

Bertrand Russell

Bertrand Russell (1872-1970) war ein britischer Philosoph, Mathematiker und Logiker.

Er erhielt 1950 den Nobelpreis für Literatur.

Zusammen mit Alfred North Whitehead veröffentlichte er die Principia Mathematica, eines der bedeutendsten Werke des 20. Jahrhunderts über die Grundlagen der Mathematik.



Zusammenfassung

- Menge als Zusammenfassung von Dingen.
  Durch die Zusammenfassung entsteht ein neues Ding.
- Schachtelung: Mengen können Mengen enthalten.
- Notation:
  - aufzählend: $\{3, 4, 5, 6, 7\}$
  - beschreibend: $\{x | x \in \mathbb{N} \text{ und } 3 \leq x \leq 7\}$
- Kardinalität: Anzahl der Elemente in einer Menge
- Die Russellsche Antinomie zeigt die Unzulänglichkeit des Cantorschen Mengenbegriffs.