Logische Folgerung

Definition 2.11

Sei $\alpha \in \mathcal{A}$ eine aussagenlogische Formel und $\mathcal{F}$ eine endliche Menge aussagenlogischer Formeln aus $\mathcal{A}$.

α heißt logische Folgerung von $\mathcal{F}$ genau dann, wenn $\mathcal{I}^*(\alpha) = 1$ für jedes Modell $\mathcal{I}$ von $\mathcal{F}$ ist. Wir schreiben

$$\mathcal{F} \models \alpha$$

und sprechen „aus $\mathcal{F}$ folgt α (logisch)“.

Bemerkung: Statt von logischer Folgerung spricht man auch von semantischer Folgerung und sagt, dass „α aus $\mathcal{F}$ semantisch folgt“.

Beispiel 2.12

(i) Für $\mathcal{F} = \{p, q\}$ gilt $\mathcal{F} \models p \wedge q$, denn für jedes Modell $\mathcal{I}$ von $\mathcal{F}$ muss $\mathcal{I}(p) = 1$ und $\mathcal{I}(q) = 1$ gelten, damit gilt aber auch $\mathcal{I}^*(p \wedge q) = 1$.

(ii) Für $\mathcal{F} = \{p \to q, q \to r\}$ gilt $\mathcal{F} \models p \to r$, denn $\mathcal{F}$ besitzt die Modelle

$$\begin{array}{llll}
(1) & \mathcal{I}(p) = 1 & \mathcal{I}(q) = 1 & \mathcal{I}(r) = 1 \\
(2) & \mathcal{I}(p) = 0 & \mathcal{I}(q) = 1 & \mathcal{I}(r) = 1 \\
(3) & \mathcal{I}(p) = 0 & \mathcal{I}(q) = 0 & \mathcal{I}(r) = 1 \\
(4) & \mathcal{I}(p) = 0 & \mathcal{I}(q) = 0 & \mathcal{I}(r) = 0
\end{array}$$

und für jedes dieser Modelle gilt $\mathcal{I}^*(p \to r) = 1$.

(iii) Für $\mathcal{F} = \{p \to r, q \vee r\}$ gilt nicht $\mathcal{F} \models p \wedge r$, denn die Belegung $\mathcal{I}(p) = 0, \mathcal{I}(q) = \mathcal{I}(r) = 1$ ist ein Modell von $\mathcal{F}$, aber $\mathcal{I}^*(p \wedge r) = 0$.

Bemerkung: Wenn aus $\mathcal{F}$ eine Formel α nicht gefolgert werden kann, notieren wir dies auch in der Form

$$\mathcal{F} \not\models \alpha.$$

Zusammenhang von logischer Folgerung und Unerfüllbarkeit

Satz 2.13

Sei $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ *eine Menge aussagenlogischer Formeln und* $\beta \in \mathcal{A}$.

Dann gilt $\mathcal{F} \models \beta$ *genau dann, wenn* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\}$ *unerfüllbar ist.*

Bemerkung: Dieser Satz ist wichtig für die Programmierung von automatischen Beweisern, die die Gültigkeit von Formeln nachweisen wollen.

Beweis.

Wir zeigen:

(i) Wenn $\mathcal{F} \models \beta$ gilt, dann ist $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\}$ unerfüllbar.

(ii) Wenn $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\}$ unerfüllbar ist, dann gilt $\mathcal{F} \models \beta$.

Zu (i): Sei $\mathcal{I}$ ein Modell für $\mathcal{F}$.

- D. h. $\mathcal{I}^*(\alpha_i) = 1$ für alle i.
- Wegen $\mathcal{F} \models \beta$ gilt dann auch $\mathcal{I}^*(\beta) = 1$.
- Daraus folgt $\mathcal{I}^*(\neg\beta) = 0$.
- Somit gibt es keine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}^*(\alpha_i) = 1$ für alle i und $\mathcal{I}^*(\neg\beta) = 1$.
- Also ist $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\}$ unerfüllbar.

Fortsetzung Beweis.

Zu (ii): Sei $\mathcal{I}$ ein beliebiges Modell für $\mathcal{F}$.

- D. h. $\mathcal{I}^*(\alpha_i) = 1$ für alle i.
- Da $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\}$ unerfüllbar ist, muss $\mathcal{I}^*(\neg\beta) = 0$ gelten (ansonsten wäre die Menge erfüllbar).
- Damit gilt aber $\mathcal{I}^*(\beta) = 1$
- und somit $\mathcal{F} \models \beta$.

Folgerung 2.14

(i) *Eine Formel $\beta \in \mathcal{A}$ ist eine Tautologie genau dann, wenn $\neg\beta$ eine Kontradiktion ist.*

(ii) *$\beta \in \mathcal{A}$ ist eine Tautologie genau dann, wenn $\emptyset \models \beta$ gilt.*

(iii) *Ist $\mathcal{F}$ eine unerfüllbare Formelmenge, dann gilt $\mathcal{F} \models \beta$ für jede Formel $\beta \in \mathcal{A}$.*

Bemerkungen:

- Statt $\emptyset \models \beta$ schreibt man üblicherweise $\models \beta$.
- Aussage (iii) bedeutet, dass man aus einer unerfüllbaren Formelmenge jede beliebige Formel folgern kann.

Beweis.

(i) Folgt unmittelbar aus Definition 2.8.

(ii) Folgt aus Satz 2.13 mit $\mathcal{F} = \emptyset$.

(iii) Wenn $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ unerfüllbar ist, dann ist auch $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\}$ unerfüllbar.
Mit Satz 2.13 folgt $\mathcal{F} \models \beta$.

Deduktion und Modus Ponens

Satz 2.15

(i) *Für jede Menge* $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *aussagenlogischer Formeln und für alle* $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$ *gilt*

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta\} \models \gamma \text{ genau dann, wenn } \mathcal{F} \models \beta \to \gamma$$

gilt.

(ii) *Für alle Formeln* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ *gilt*

$$\{\alpha, \alpha \to \beta\} \models \beta.$$

Beweis.

(i) Es gilt $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta \to \gamma$

gdw.	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \neg(\beta \to \gamma)\}$	unerfüllbar ist
gdw.	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \wedge \neg\gamma\}$	unerfüllbar ist
gdw.	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta, \neg\gamma\}$	unerfüllbar ist
gdw.	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta\} \models \gamma$	gilt.

(ii) Es gilt

$$\{\alpha, \alpha \to \beta\} \models \beta$$

genau dann, wenn

$$\{\alpha, \alpha \to \beta, \neg\beta\}$$

unerfüllbar ist. ✎

Satz 2.16

Es seien $\mathcal{F}$ eine Menge aussagenlogischer Formeln und $\alpha \in \mathcal{A}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) *Gilt $\mathcal{F} \models \alpha$, dann auch $\mathcal{F} \cup \{\beta\} \models \alpha$ für alle Formeln $\beta \in \mathcal{A}$.*

(ii) *Gilt $\mathcal{F} \models \alpha$ und ist $\beta \in \mathcal{A}$ allgemeingültig, dann gilt $\mathcal{F} \setminus \{\beta\} \models \alpha$.*

Bemerkung: $\mathcal{F} \setminus \{\beta\}$ bedeutet, dass die Formel β aus der Formelmenge $\mathcal{F}$ entfernt wird.

Beweis.

Übungsaufgabe.

Implikation

Definition 2.17

Gilt für aussagenlogische Formeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und β, dass die Subjunktion

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$$

eine Tautologie ist, dann heißt diese Subjunktion Implikation, und wir schreiben

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \Rightarrow \beta$$

und sprechen „$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ implizieren β“.

Beispiel 2.18

Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$, dann gelten die folgenden Implikationen.

(i) Abschwächung der Nachbedingung:

$$\alpha \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$$

(ii) Verschärfung der Vorbedingung:

$$(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$$

(iii) Kettenschluss:

$$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \Rightarrow (\alpha \to \gamma)$$

Überprüfung: ✎

$\rightarrow$ vs. $\Rightarrow$

Auf den ersten Blick scheinen die Symbole „$\rightarrow$“ und „$\Rightarrow$“ dasselbe zu bedeuten. Dies ist aber nicht der Fall.

- $\rightarrow$ ist ein Symbol in der Sprache der Aussagenlogik. Es verknüpft zwei logische Formeln miteinander.
- Das Symbol $\Rightarrow$ verwenden wir dagegen metasprachlich, um eine Aussage über eine Eigenschaft aussagenlogischer Formeln zu machen.

Äquivalenz der Folgerungsbegriffe

Satz 2.19

Für aussagenlogische Formeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ *gilt*

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \models \beta \text{ genau dann, wenn } (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \Rightarrow \beta$$

gilt.

Beweis.

Wir setzen $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ und zeigen:

(i) Wenn $\mathcal{F} \models \beta$ gilt, dann gilt auch $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \Rightarrow \beta$.

(ii) Wenn $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \Rightarrow \beta$ gilt, dann gilt auch $\mathcal{F} \models \beta$.

Syntaktische Folgerung

- Syntaktische Folgerung heißt, dass eine Folgerung vorgenommen wird, ohne die Semantik der beteiligten Formeln zu berechnen.
- Die Folgerung geschieht, indem in einer Formel Teilformeln durch andere Formeln ersetzt werden.
- Diese Ersetzung von Formeln geschieht wiederum mithilfe sogenannter Inferenzregeln.

Inferenzregel

Definition 2.20

(i) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ aussagenlogische Formeln, für die die Implikation $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \Rightarrow \beta$ gilt.

Dann heißt

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\beta}$$

Ableitungs- oder Inferenzregel. Die Formelmenge $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ heißt Prämisse und β heißt Konklusion dieser Inferenzregel.

Fortsetzung Definition.

(ii) Sei

- γ eine aussagenlogische Formel,
- $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Menge aussagenlogischer Formeln,
- $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ irgendeine Auswahl von Formeln aus $\mathcal{F}$ und
- $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ die Menge der nicht ausgewählten Formeln aus $\mathcal{F}$ sowie
- $$\frac{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}{\gamma}$$
  eine Inferenzregel,

dann heißt $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \gamma\}$ ableitbar aus $\mathcal{F}$, und wir schreiben

$$\mathcal{F} \vdash \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \gamma\}.$$

Fortsetzung Definition.

(iii) Eine aussagenlogische Formel γ ist ableitbar aus einer Menge $\mathcal{F}$ von aussagenlogischen Formeln, falls es Mengen aussagenlogischer Formeln $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_r, r \geq 0$ gibt mit

$$\mathcal{F} \vdash \mathcal{F}_1 \vdash \mathcal{F}_2 \vdash \cdots \vdash \mathcal{F}_r \vdash \{\gamma\}.$$

Wir notieren dann $\mathcal{F} \vdash \gamma$ und sagen, dass γ logisch aus $\mathcal{F}$ ableitbar ist.

Beispiel 2.21

(i) Modus Ponens als Inferenzregel:

$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$

(ii) Modus Tollens:

$$\frac{\alpha \to \beta, \neg\beta}{\neg\alpha}$$

(iii) Reduction ad absurdum:

$$\frac{(\gamma \vee \alpha) \to \beta, (\gamma \vee \alpha) \to \neg\beta}{\neg\alpha}$$

(iv) Kettenschluss:

$$\frac{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$$

Fortsetzung Beispiel.

(v) Es gilt

$$\{\alpha \to \beta, \neg\beta, \neg\alpha \to \gamma\} \vdash \{\neg\alpha, \neg\alpha \to \gamma\} \vdash \{\gamma\}$$

und damit

$$\{\alpha \to \beta, \neg\beta, \neg\alpha \to \gamma\} \vdash \gamma.$$

Die erste Ableitung erfolgt mithilfe des Modus Tollens, die zweite mithilfe des Modus Ponens.

Kalkül

- Die logische Ableitung geschieht, indem eine Menge von aussagenlogischen Formeln aufgrund von Inferenzregeln oder bereits durchgeführten logischen Ableitungen verändert wird.
- Die Semantik der Formeln wird dabei niemals betrachtet.
- Die korrekte Semantik wird nur einmalig für die benutzten Inferenzregeln vorausgesetzt (Definition 2.20).
- Solche syntaktischen Ableitungssysteme nennt man Kalküle.
- Kalküle sind gut geeignet für die Programmierung von logischen Schlussfolgerungsmechanismen auf Rechnern, z. B. in der Künstlichen Intelligenz.

Korrektheit und Vollständigkeit

Kriterien für einen Kalkül:

- Widerspruchsfreiheit bzw. Korrektheit:

  $$\text{Gilt } \mathcal{F} \vdash \alpha, \text{ dann gilt auch } \mathcal{F} \models \alpha.$$

  Jede syntaktisch abgeleitete Formel ist semantisch korrekt.

- Vollständigkeit:

  $$\text{Gilt } \mathcal{F} \models \alpha, \text{ dann gilt auch } \mathcal{F} \vdash \alpha.$$

  Jede semantisch korrekte Formel lässt sich auch syntaktisch ableiten.

Im übernächsten Abschnitt lernen Sie einen korrekten und vollständigen Kalkül für die Aussagenlogik kennen.