Kapitel 2

Aussagenlogik

Inhalt

Aussagenlogik als Sprache

Wir wollen die Aussagenlogik als formale Sprache einführen.

Eine (formale) Sprache wird festgelegt durch

- ein Alphabet, welches ein endlicher Zeichenvorrat ist, aus dem die Wörter und Sätze einer Sprache zusammengesetzt sind,
- die Syntax, die festlegt, welche mit den Elementen des Alphabets gebildete Zeichenketten als Wörter oder Sätze zur Sprache gehören,
- die Semantik, welche den Wörtern und Sätzen der Sprache eine Bedeutung zuordnet.

Alphabet der Aussagenlogik

Das Alphabet der Aussagenlogik besteht aus zwei Mengen:

- aus der Menge O der aussagenlogischen Operatorsymbole

$$O = \{\underline{0}, \underline{1}, \neg, \wedge, \vee, (,)\}$$

- sowie aus einer Menge V von aussagenlogischen Variablen.

  Wir nutzen als aussagenlogische Variablen Kleinbuchstaben vom Ende des deutschen Alphabets, z. B. p, q, r, v, x, y, z, bei Bedarf auch indiziert, also z. B. x_1, x_2, x_3.

Syntax aussagenlogischer Formeln

Die Sprache $\mathcal{A}$ der Aussagenlogik, deren Elemente aussagenlogische Formeln heißen, ist durch folgende Syntaxregeln festgelegt:

(i) Die Operatorsymbole $\underline{0}, \underline{1} \in O$, die so genannten aussagenlogischen Konstantenbezeichner, sind aussagenlogische Formeln: $\underline{0}, \underline{1} \in \mathcal{A}$.

(ii) Jede aussagenlogische Variable ist auch eine aussagenlogische Formel: Für alle $v \in V$ gilt $v \in \mathcal{A}$.

(iii) Als Variablenbezeichner für aussagenlogische Formeln verwenden wir kleine Buchstaben vom Anfang des griechischen Alphabets: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, bei Bedarf auch indiziert, z. B. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Aus bereits vorhandenen aussagenlogischen Formeln werden mithilfe der Operator- und Klammersymbole neue Formeln gebildet: Sind $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, dann auch $(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), \neg\alpha \in \mathcal{A}$.

(iv) Genau die gemäß den Regeln (i) bis (iii) bildbaren Zeichenketten gehören zu $\mathcal{A}$.

- Aussagenlogische Konstantenbezeichner und Variablen heißen auch atomare Formeln.
- Die unter Verwendung von Regel (iii) gebildeten Formeln heißen zusammengesetzt.
- Formeln der Gestalt v sowie der Gestalt $\neg v$ mit $v \in V$ heißen Literale.

  Literale sind also aussagenlogische Variablen sowie mit dem Operator $\neg$ versehene aussagenlogische Variablen.

Beispiel 2.1

Es gilt:

(i) $(p \wedge q) \in \mathcal{A}$

(ii) $(((p \vee (q \wedge r)) \wedge \neg(q \vee \neg r)) \vee \underline{0}) \in \mathcal{A}$

(iii) $p(\neg q \vee r) \notin \mathcal{A}$

Wir zeigen, dass (ii) gilt:

(1) $\underline{0}, p, q, r \in \mathcal{A}$ gemäß Regel (i) bzw. Regel (ii)

(2) Gemäß (1) und Regel (iii) ist $\neg r \in \mathcal{A}$.

(3) Gemäß (1) und Regel (iii) ist $(q \wedge r) \in \mathcal{A}$.

(4) Gemäß (1,2) und Regel (iii) ist $(q \vee \neg r) \in \mathcal{A}$.

(5) Gemäß (4) und Regel (iii) ist $\neg(q \vee \neg r) \in \mathcal{A}$.

(6) Gemäß (1,3) und Regel (iii) ist $(p \vee (q \wedge r)) \in \mathcal{A}$.

Fortsetzung Beispiel.

(7) Gemäß (5,6) und Regel (iii) ist $((p \vee (q \wedge r)) \wedge \neg(q \wedge \neg r)) \in \mathcal{A}$.

(8) Gemäß (1,7) und Regel (iii) ist $(((p \vee (q \wedge r)) \wedge \neg(q \vee \neg r)) \vee \underline{0}) \in \mathcal{A}$.

Durch schrittweises Anwenden der Regeln (i) bis (iii) haben wir die aussagenlogische Formel

$$(((p \vee (q \wedge r)) \wedge \neg(q \vee \neg r)) \vee \underline{0})$$

konstruiert.

Diese Formel enthält die vier Literale $p, q, r, \neg r$.

Aussagenlogische Konstanten

- Die Bedeutung von aussagenlogischen Formeln wollen wir durch die Werte 0 für „falsch“ und 1 für „wahr“ angeben.
- Die Menge dieser beiden aussagenlogischen Konstanten bzw. Wahrheitswerte bezeichnen wir mit $\mathbb{B}$.
- Wir legen auf $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ eine Ordnung fest: 0 sei kleiner als 1.
- Also $\max\{0, 1\} = 1$ und $\min\{0, 1\} = 0$.
- Außerdem legen wir als Operationen auf $\mathbb{B}$ fest:

$$1 - 1 = 0 \quad \text{sowie} \quad 1 - 0 = 1.$$

- Mit diesen Operationen gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \min\{x, y\} &= 1 - \max\{1 - x, 1 - y\} \\ \max\{x, y\} &= 1 - \min\{1 - x, 1 - y\} \end{aligned}$$

- Wir könnten also prinzipiell auf min oder max verzichten.

Abstrakte Logikmaschine

- Wir können $(\mathbb{B}, \max, \min, -)$ als eine abstrakte Maschine auffassen, die die Werte 0 und 1 zur Verfügung stellt und darauf die Operationen $\max, \min$ und $-$ ausführen kann.
- Solch eine abstrakte Maschine nennt man auch Rechenstruktur oder algebraische Struktur.
- Eine mehr praktische Sichtweise wäre, sich die abstrakte Maschine als speziellen Rechner vorzustellen.
- Eine aussagenlogische Formel ist dann sowas wie ein Programm: abhängig von Eingaben wird ein Ergebnis berechnet.
- Diese Eingabe besteht darin, den aussagenlogischen Variablen der Menge V konkrete Wahrheitswerte zuzuweisen.
- Wir benötigen jetzt noch eine Vorschrift, die exakt festlegt, wie eine aussagenlogische Formel – abhängig von den Eingaben – berechnet wird.

Rekursion

- Rekursion bezeichnet die Eigenschaft von Regeln, dass sie auf das, was durch die Regeln erzeugt wird, wieder angewendet werden können.
- Wir haben die Syntax der aussagenlogischen Formeln rekursiv definiert.
- Rekursion ist von fundamentaler Bedeutung für die Informatik.
- Wir können auch Mengen rekursiv definieren.

Beispiel 2.2

Die Menge M bestehe genau aus den Zahlen, die durch die folgenden Regeln erzeugt werden können:

(i) $5 \in M$

(ii) Gilt $x \in M$ und $2x + 1 \leq 50$, dann ist auch $2x + 1 \in M$.

(iii) Gilt $x \in M$ und $3x + 2 \leq 50$, dann ist auch $3x + 2 \in M$.

Vereinigung von Mengen

- Für zwei Mengen A und B bezeichnet $A \cup B$ die Vereinigung von A und B.
- Hierbei werden die Elemente von A und B zu einer Menge zusammengefasst.
- Dabei werden mehrfach vorkommende Elemente natürlich nur einmal aufgeführt.

Beispiel 2.3

Sei $A = \{1, 2, 5\}$ und $B = \{3, 5, 6\}$. Dann gilt

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}.$$

Menge der Variablen einer aussagenlogischen Formel

Sei $\gamma \in \mathcal{A}$ eine aussagenlogische Formel.

Die Menge V_γ der aussagenlogischen Variablen in γ definieren wir rekursiv wie folgt:

(i) $V_\gamma = \emptyset$, falls $\gamma \in \{\underline{0}, \underline{1}\}$,

(ii) $V_\gamma = \{\gamma\}$, falls $\gamma \in V$,

(iii) $V_\gamma = V_\alpha$, falls $\gamma = \neg\alpha$,
$V_\gamma = V_\alpha \cup V_\beta$, falls $\gamma = (\alpha \wedge \beta)$ oder $\gamma = (\alpha \vee \beta)$.

Belegung

Sei $\gamma \in \mathcal{A}$ eine aussagenlogische Formel.

Mit einer Belegung $\mathcal{I}$ wird jeder Variablen $v \in V_\gamma$ genau ein Wahrheitswert zugewiesen.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \quad : \quad & V_\gamma \to \mathbb{B} \\ & v \mapsto \mathcal{I}(v) \end{aligned}$$

Dabei gibt es für jede Variable $v \in V_\gamma$ genau zwei mögliche Belegungen:

$$\mathcal{I}(v) = 0 \quad \text{oder} \quad \mathcal{I}(v) = 1$$

Gilt $|V_\gamma| = n$, dann gibt es 2^n mögliche Belegungen $\mathcal{I} : V_\gamma \to \mathbb{B}$.

$$\mathcal{I}_\gamma = \{\mathcal{I} | \mathcal{I} : V_\gamma \to \mathbb{B}\}$$

bezeichnet die Menge der möglichen Belegungen für γ.

Interpretation

Die Interpretation einer aussagenlogischen Formel $\gamma \in \mathcal{A}$ erfolgt rekursiv entlang der syntaktischen Regeln.

Mit einer gewählten Belegung $\mathcal{I} \in \mathcal{I}_\gamma$ wird die Interpretation $\mathcal{I}^*(\gamma)$ einer aussagenlogischen Formel $\gamma \in \mathcal{A}$ gemäß den folgenden Regeln berechnet:

(i) Für $\gamma \in \{\underline{0}, \underline{1}\}$ ist $\mathcal{I}^*(\underline{0}) = 0$ und $\mathcal{I}^*(\underline{1}) = 1$.
Die Konstantenbezeichner werden also unabhängig von der gegebenen Formel γ durch fest zugewiesene Wahrheitswerte interpretiert.

(ii) Für $v \in V_\gamma$: $\mathcal{I}^*(v) = \mathcal{I}(v)$
Die Variablen $v \in V_\gamma$ der Formel γ werden durch die gewählte Belegung $\mathcal{I}$ interpretiert.

(iii) Die Interpretation zusammengesetzter Formeln wird gemäß folgender Regeln berechnet:

Ist $\gamma = (\alpha \wedge \beta)$ mit $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, dann ist

$$\mathcal{I}^*(\gamma) = \mathcal{I}^*(\alpha \wedge \beta) = \min\{\mathcal{I}^*(\alpha), \mathcal{I}^*(\beta)\}.$$

Ist $\gamma = (\alpha \vee \beta)$ mit $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, dann ist

$$\mathcal{I}^*(\gamma) = \mathcal{I}^*(\alpha \vee \beta) = \max\{\mathcal{I}^*(\alpha), \mathcal{I}^*(\beta)\}.$$

Ist $\gamma = \neg\alpha$ mit $\alpha \in \mathcal{A}$, dann ist

$$\mathcal{I}^*(\gamma) = \mathcal{I}^*(\neg\alpha) = 1 - \mathcal{I}^*(\alpha).$$

Beispiel 2.4

Wir betrachten die Formel

$$\gamma = (((p \vee (q \wedge r)) \wedge \neg(q \vee \neg r)) \vee \underline{0})$$

aus Beispiel 2.1 (ii). Es ist $V_\gamma = \{p, q, r\}$. Wir wählen die Belegung

$$\mathcal{I}(p) = 1, \mathcal{I}(q) = 0, \mathcal{I}(r) = 1.$$

Mit dieser Belegung ergibt sich die Interpretation

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^*(\gamma) &= \mathcal{I}^*(((p \vee (q \wedge r)) \wedge \neg(q \vee \neg r)) \vee \underline{0}) \\
&= \max\{\mathcal{I}^*((p \vee (q \wedge r)) \wedge \neg(q \vee \neg r), \mathcal{I}^*(\underline{0})\} \\
&= \max\{\min\{\mathcal{I}^*(p \vee (q \wedge r)), \mathcal{I}^*(\neg(q \vee \neg r))\}, 0\} \\
&= \max\{\min\{\max\{\mathcal{I}^*(p), \mathcal{I}^*(q \wedge r)\}, 1 - \mathcal{I}^*(q \vee \neg r)\}, 0\} \\
&= \max\{\min\{\max\{\mathcal{I}(p), \min\{\mathcal{I}^*(q), \mathcal{I}^*(r)\}\}, \\
&\qquad\qquad 1 - \max\{\mathcal{I}^*(q), \mathcal{I}^*(\neg r)\}\}, 0\}
\end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

$$
\begin{aligned}
&= \max\{\min\{\max\{1, \min\{\mathcal{I}(q), \mathcal{I}(r)\}\}, 1 - \max\{\mathcal{I}(q), 1 - \mathcal{I}^*(r)\}\}, 0\} \\
&= \max\{\min\{\max\{1, \min\{0, 1\}\}, 1 - \max\{0, 1 - \mathcal{I}(r)\}\}, 0\} \\
&= \max\{\min\{\max\{1, \min\{0, 1\}\}, 1 - \max\{0, 1 - 1\}\}, 0\} \\
&= \max\{\min\{\max\{1, 0\}, 1 - 0\}, 0\} \\
&= \max\{\min\{1, 1\}, 0\} \\
&= \max\{1, 0\} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Syntaktische Vereinbarungen

- Da wir die Operatoren $\underline{0}$ und $\underline{1}$ mit festen Werten interpretieren, unterscheiden wir nicht mehr zwischen den Operatoren $\underline{0}$ bzw. $\underline{1}$ und den zugeordneten Werte 0 bzw. 1. Wir schreiben von nun an also in Formeln 0 bzw. 1 anstelle von $\underline{0}$ bzw. $\underline{1}$.
- Weiterhin vereinbaren wir, dass der Operator $\neg$ stärker bindet als der Operator $\wedge$, und dieser stärker als $\vee$. Dies hilft, Klammern einzusparen.
- Bei zusammengesetzten Formel können wir auch auf die äußeren Klammern verzichten.
- Wir dürfen also $\alpha \wedge \beta \vee \gamma$ anstelle von $((\alpha \wedge \beta) \vee \gamma)$ schreiben.
- Achtung: In $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$ können wir nicht auf die Klammern verzichten.

Wahrheitstafeln

α	$\neg\alpha$
1	0
0	1

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

α	β	$\alpha \vee \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- $\neg$ Negation
- $\wedge$ Konjunktion
- $\vee$ Disjunktion

Beispiel 2.5

Die Wahrheitstafel der Formel

$$\gamma = ((p \vee (q \wedge r)) \wedge \neg(q \vee \neg r)) \vee 0$$

ist:

p	q	r	$\underline{0}$	$\neg r$	$q \wedge r$	$q \vee \neg r$	$\neg(q \vee \neg r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee (q \wedge r))$ $\wedge \neg(q \vee \neg r)$	$((p \vee (q \wedge r))$ $\wedge \neg(q \vee \neg r)) \vee 0$
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0

Aussagenlogische Operationen

Wir führen weitere aussagenlogische Operationen ein:

- die Subjunktion $\rightarrow$ (aus α folgt β)
- die Bijunktion $\leftrightarrow$ (α genau dann, wenn β)
- das exklusive Oder $\oplus$ (entweder α oder β)

Die Operationen haben folgende Syntax und Semantik:

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

α	β	$\alpha \oplus \beta$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Folgerung 2.6

Für jede Belegung $\mathcal{I}$ der Variablen in aussagenlogischen Formeln α, β gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^*(\alpha \to \beta) &= \mathcal{I}^*(\neg\alpha \vee \beta) \\ \mathcal{I}^*(\alpha \leftrightarrow \beta) &= \mathcal{I}^*((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)) \\ \mathcal{I}^*(\alpha \oplus \beta) &= \mathcal{I}^*((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)) \end{aligned}$$

Beweis.

Wir vergleichen einfach die Wahrheitstafeln der aussagenlogischen Formeln (hier nur für die erste Gleichung):

α	β	$\alpha \to \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

α	β	$\neg\alpha \vee \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bemerkung: $\mathcal{I}^*(\neg\alpha \vee \beta) = \max\{1 - \mathcal{I}^*(\alpha), \mathcal{I}^*(\beta)\}$

Beispiel 2.7

Für jede Belegung $\mathcal{I}$ der aussagenlogischen Formeln $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mathcal{I}^*(\alpha \wedge \neg\beta) = \mathcal{I}^*(\neg(\alpha \to \beta))$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^*(\alpha \wedge \neg\beta) &= \min\{\mathcal{I}^*(\alpha), 1 - \mathcal{I}^*(\beta)\} \\
&= 1 - \max\{1 - \mathcal{I}^*(\alpha), \mathcal{I}^*(\beta)\} \\
&= 1 - \mathcal{I}^*(\neg\alpha \vee \beta) \\
&= 1 - \mathcal{I}^*(\alpha \to \beta) \\
&= \mathcal{I}^*(\neg(\alpha \to \beta))
\end{aligned}$$

Erfüllbarkeit

Definition 2.8

Sei $\alpha \in \mathcal{A}$ eine aussagenlogische Formel und $\mathcal{F}$ eine endliche Menge aussagenlogischer Formeln aus $\mathcal{A}$.

(i) α heißt erfüllbar genau dann, wenn eine Belegung $\mathcal{I}$ von α existiert mit $\mathcal{I}^*(\alpha) = 1$.

(ii) α heißt Tautologie oder allgemeingültig genau dann, wenn für jede Belegung $\mathcal{I}$ von α gilt $\mathcal{I}^*(\alpha) = 1$.

(iii) α heißt Kontradiktion, widerspruchsvoll oder unerfüllbar genau dann, wenn für jede Belegung $\mathcal{I}$ von α gilt $\mathcal{I}^*(\alpha) = 0$.

(iv) $\mathcal{F}$ heißt erfüllbar genau dann, wenn es eine Belegung $\mathcal{I}$ von $\mathcal{F}$ gibt, so dass $\mathcal{I}^*(\gamma) = 1$ für alle $\gamma \in \mathcal{F}$ ist. $\mathcal{I}$ heißt dann Modell für $\mathcal{F}$.
Gibt es zu $\mathcal{F}$ kein Modell, dann heißt $\mathcal{F}$ unerfüllbar.

Beispiel 2.9

(i) Die Formeln

$$p \wedge q \quad \text{und} \quad (p \wedge q) \vee (q \rightarrow r)$$

sind erfüllbar aber keine Tautologien.

(ii) Die Formeln

$$p \vee \neg p \quad \text{und} \quad (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

sind Tautologien.

(iii) Die Formel $p \wedge \neg p$ ist eine Kontradiktion.

(iv) Die Menge

$$\mathcal{F}_1 = \{p \vee q, q \wedge \neg r, (p \wedge q) \vee (q \rightarrow r)\}$$

ist erfüllbar, denn $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = 1, \mathcal{I}(r) = 0$ ist ein Modell für $\mathcal{F}_1$.

(v) Die Menge $\mathcal{F}_2 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ ist unerfüllbar.

Erfüllbarkeit und Wahrheitstafel

Folgerung 2.10

(i) *Eine Formel ist genau dann erfüllbar, wenn in der Ergebnisspalte ihrer Wahrheitstafel mindestens eine* 1 *vorkommt.*

(ii) *Eine Formel ist genau dann eine Tautologie, wenn in der Ergebnisspalte ihrer Wahrheitstafel nur Einsen vorkommen.*

(iii) *Eine Formel ist genau dann widerspruchsvoll, wenn in der Ergebnisspalte ihrer Wahrheitstafel nur Nullen vorkommen.*