Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Mathematische Grundlagen

Lösungen zur Klausur Wintersemester 2016/17

29. März 2017, 8:30–10:00 Uhr

Name: **Vorname:**

Matrikelnr.: **Unterschrift:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreicht							

- Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden, ab 48 Punkten erhalten Sie eine 1.0.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sie müssen Ihre Antworten begründen.
- **Tipp:** Schauen Sie sich erstmal alle Aufgaben an.

Viel Erfolg!

Bemerkungen:

Note

1. Prüfer (Prof. Dr. Peter Becker)

2. Prüfer (Prof. Dr. Alexander Asteroth)

Aufgabe 1 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Begründen oder widerlegen Sie:

(a) $\neg(q \to p) \land \neg r$ ist erfüllbar.

(b) $p \land q \to p \lor q$ ist eine Tautologie.

(c) $p \to (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_n) \equiv \neg(\neg q_1 \land \neg q_2 \land \ldots \land \neg q_n) \lor \neg p$

(d) Wenn $\alpha \land \neg\beta$ unerfüllbar ist, dann gilt $\{\alpha\} \models \beta$.

Lösung:

(a) Mit der Belegung $\mathcal{I}(p) = 0, \mathcal{I}(q) = 1, \mathcal{I}(r) = 0$ ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}^*(q \to p) & = & 0 \\ \mathcal{I}^*(\neg(q \to p)) & = & 1 \\ \mathcal{I}^*(\neg r) & = & 1 \\ \mathcal{I}^*(\neg(q \to p) \land \neg r) & = & 1 \end{array}$$

Also ist die Formel erfüllbar.

Alternativ kann man natürlich auch eine komplette Wahrheitstabelle angeben und darauf verweisen, dass für die oben angegebene Belegung in der Ergebnisspalte eine 1 steht.

(b) Die Formel ist eine Tautologie. Der Nachweis kann natürlich mit einer Wahrheitstafel erfolgen oder einfacher mit der folgenden Umformung:

$$\begin{array}{rcl} p \land q \to p \lor q & \equiv & \neg(p \land q) \lor (p \lor q) \\ & \equiv & \neg p \lor \neg q \lor p \lor q \\ & \equiv & (\neg p \lor p) \lor (\neg q \lor q) \\ & \equiv & 1 \lor 1 \\ & \equiv & 1 \end{array}$$

(c) Die Aussage ist wahr.

$$\begin{array}{rcl} p \to (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_n) & \equiv & \neg p \lor (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_n) \\ & \equiv & (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_n) \lor \neg p \\ & \equiv & \neg(\neg q_1 \land \neg q_2 \land \ldots \land \neg q_n) \lor \neg p \end{array}$$

(d) Die Aussage ist wahr. Es ist eine Richtung des zentralen Satzes 2.13:

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta\} \text{ ist unerfüllbar}$$

Mit $n = 1$ und $\alpha_1 = \alpha$ entspricht die Richtung "$\Leftarrow$" von Satz 2.13 der Aussage von (d).

Aufgabe 2 (3+7=10 Punkte)

(a) Überführen Sie die Formel

$$(p \wedge (q \to r)) \to (s \vee t)$$

in konjunktive Normalform und geben Sie die Klauselmenge an.

(b) Gegeben sind die folgenden Klauseln:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{a, \neg b, \neg c\} \\ K_2 &= \{c, d, e\} \\ K_3 &= \{b, e\} \\ K_4 &= \{a, \neg d\} \\ K_5 &= \{\neg a\} \end{aligned}$$

Zeige Sie mithilfe der Resolution: $\{K_1, \ldots, K_5\} \models e$

Lösung:

(a)

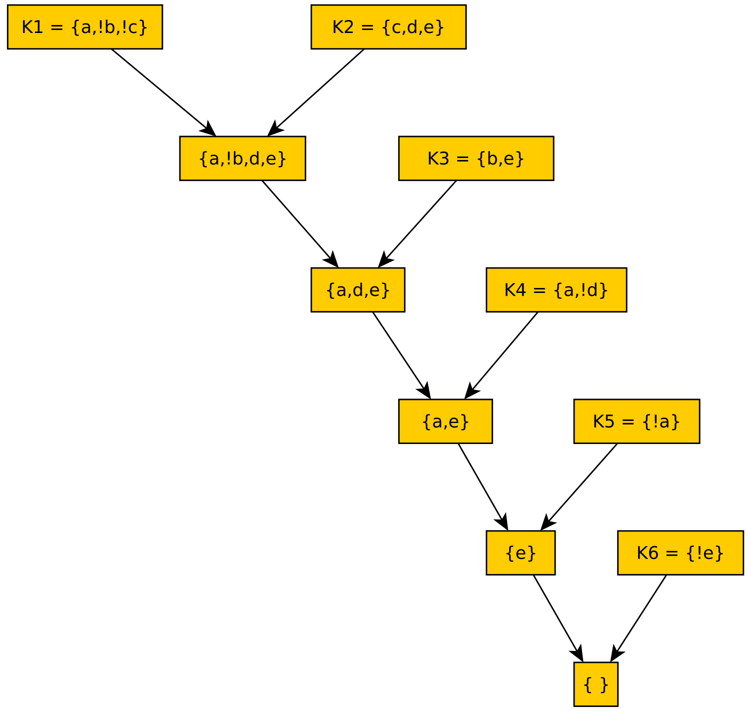
$$\begin{aligned} (p \wedge (q \to r)) \to (s \vee t) &\equiv \neg(p \wedge (q \to r)) \vee s \vee t \\ &\equiv \neg p \vee \neg(q \to r) \vee s \vee t \\ &\equiv \neg p \vee \neg(\neg q \vee r) \vee s \vee t \\ &\equiv \neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee s \vee t \\ &\equiv (\neg p \vee q \vee s \vee t) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s \vee t) \end{aligned}$$

Klauselmenge: $\{\{\neg p, q, s, t\}, \{\neg p, \neg r, s, t\}\}$

(b) Wir negieren die Hypothese: $K_6 = \{\neg e\}$

Jetzt leiten wir die leere Klausel ab:

$$\begin{aligned} K_7 &= \mathrm{Res}(K_1, K_2) = \{a, \neg b, d, e\} \\ K_8 &= \mathrm{Res}(K_3, K_7) = \{a, d, e\} \\ K_9 &= \mathrm{Res}(K_4, K_8) = \{a, e\} \\ K_{10} &= \mathrm{Res}(K_5, K_9) = \{e\} \\ K_{11} &= \mathrm{Res}(K_6, K_{10}) = \Box \end{aligned}$$



K1 = {a,!b,!c}
K2 = {c,d,e}
{a,!b,d,e}
K3 = {b,e}
{a,d,e}
K4 = {a,!d}
{a,e}
K5 = {!a}
{e}
K6 = {!e}
{ }

Aufgabe 3 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Gegeben sei die prädikatenlogischen Belegung mit dem Universum

$$U = \{a, b\}$$

und

$$\begin{aligned} P &= \{b\} \\ Q &= \{a\} \end{aligned}$$

für die einstelligen Prädikate P und Q.

Sind die beiden folgenden Formeln wahr oder falsch (mit Begründung):

(a) $(\forall x(Q(x) \rightarrow \neg P(x)))$

(b) $(\exists y(P(y) \wedge Q(y)))$

Formulieren Sie in strenger prädikatenlogischer Syntax die folgenden Sachverhalte:

(c) P und Q enthalten die gleichen Elemente.

(d) Es gibt ein Element, dass weder in P noch in Q ist.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^*(\forall x(Q(x) \rightarrow \neg P(x))) &= \min\{\mathcal{I}^*(Q(a) \rightarrow \neg P(a)), \mathcal{I}^*(Q(b) \rightarrow \neg P(b))\} \\ &= \min\{\mathcal{I}^*(1 \rightarrow \neg 0), \mathcal{I}^*(0 \rightarrow \neg 1)\} \\ &= \min\{1, 1\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^*(\exists y(P(y) \wedge Q(y))) &= \max\{\mathcal{I}^*(P(a) \wedge Q(a)), \mathcal{I}^*(P(b) \wedge Q(b))\} \\ &= \max\{\mathcal{I}^*(0 \wedge 1), \mathcal{I}^*(1 \wedge 0)\} \\ &= \max\{0, 0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) $(\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)))$

(d) $(\exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)))$

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (4k-1) = 2n^2 + n$$

(b) Die Menge M ist durch die folgenden Regeln definiert:

(i) $7 \in M$

(ii) Gilt $x, y \in M$, dann gilt auch $3(x+3) + y - 2 \in M$.

(iii) M enthält genau die Elemente, die durch die Regeln (i) und (ii) gebildet werden können.

Zeigen Sie: $\forall x \in M : 7|x$

Lösung:

(a) $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} (4k-1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3 = 2 \cdot 1^2 + 1$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (4k-1) &= (4(n+1)-1) + \sum_{k=1}^{n} (4k-1) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} 4n + 3 + 2n^2 + n \\
&= 2n^2 + 4n + 2 + (n+1) \\
&= 2(n^2 + 2n + 1) + (n+1) \\
&= 2(n+1)^2 + (n+1)
\end{aligned}$$

(b) Wir nutzen strukturelle Induktion.

Induktionsanfang: $7|7$ ist wahr.

Induktionsschritt: Seien $x, y \in M$. Aus der Induktionsvoraussetzung ($7|x$ und $7|y$) folgt:

$$\exists p \in \mathbb{N} : 7p = x \quad \text{und} \quad \exists q \in \mathbb{N} : 7q = y$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
3(x+3) + y - 2 &= 3x + 9 + y - 2 \\
&= 3x + y + 7 \\
&= 3 \cdot 7p + 7q + 7 \\
&= 7(3p + q + 1)
\end{aligned}$$

Also gilt $7|3(x+3) + y - 2$.

Aufgabe 5 (2+2+2+4=10 Punkte)

Sind die folgenden Relationen $R_i, i = 1,2,3,4$ Äquivalenzrelationen auf der Grundmenge $\mathbb{N}$? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $R_1 = \{(n,m) | f(n) \neq f(m)\}$ für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(b) $R_2 = \{(n,m) | \frac{1}{3} \leq \frac{n}{m} \leq 3\}$

(c) $R_3 = \{(n,m) | 3n - 3m \geq 0\}$

(d) $R_4 = \{(n,m) | \text{Die letzten Ziffern von } n \text{ und } m \text{ sind gleich}\}$

Lösung:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(n) = f(n)$ und somit $(n,n) \notin R_1$.
Also ist R_1 nicht reflexiv und somit keine Äquivalenzrelation.

(b) Es gilt $(1,3) \in R_2$ und $(3,9) \in R_2$, aber $(1,9) \notin R_2$.
Also ist R_2 nicht transitiv und somit keine Äquivalenzrelation.

(c) Es gilt $(2,1) \in R_3$, aber $(1,2) \notin R_3$.
Also ist R_3 nicht symmetrisch und somit keine Äquivalenzrelation.

(d) Für ein $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathrm{lz}(n)$ die letzte Ziffer von n.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{lz}(n) = \mathrm{lz}(n)$. Also $(n,n) \in R_4$ und somit ist R_4 reflexiv.
Es seien $n, m \in \mathbb{N}$.

$$(n,m) \in R_4 \Rightarrow \mathrm{lz}(n) = \mathrm{lz}(m) \Rightarrow \mathrm{lz}(m) = \mathrm{lz}(n) \Rightarrow (m,n) \in R_4$$

Also ist R_4 symmetrisch.
Es seien $n, m, k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (n,m) \in R_4 \wedge (m,k) \in R_4 &\Rightarrow \mathrm{lz}(n) = \mathrm{lz}(m) \wedge \mathrm{lz}(m) = \mathrm{lz}(k) \\ &\Rightarrow \mathrm{lz}(n) = \mathrm{lz}(k) \\ &\Rightarrow (n,k) \in R_4 \end{aligned}$$

Also ist R_4 auch transitiv und damit eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 6 (4+6=10 Punkte)

(a) Sei $f : M \to N$, $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{falls } x \leq 2 \\ x - 5 & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

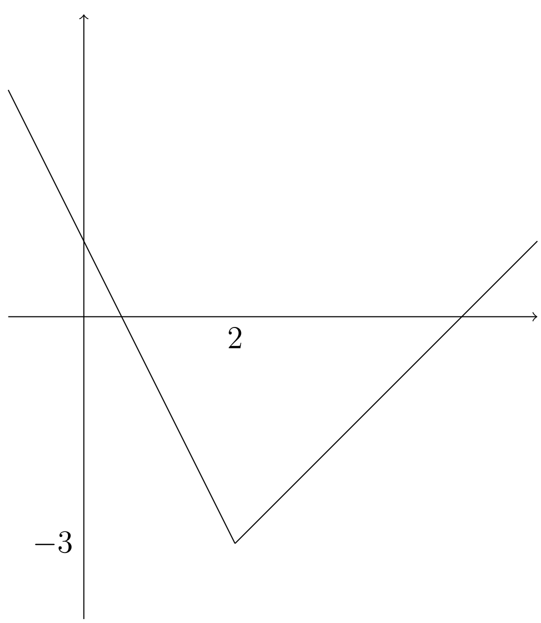
Untersuchen Sie f auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B : f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x : (x \in A \vee x \in B) \wedge f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x : (x \in A \wedge f(x) = y) \vee (y \in B \wedge f(x) = y) \\ &\Leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge f(x) = y) \vee (\exists x : x \in B \wedge f(x) = y) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A : f(x) = y) \vee (\exists x \in B : f(x) = y) \\ &\Leftrightarrow (y \in f(A)) \vee (y \in f(B)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

(b) Skizze der Funktion:



Man erkennt, dass die Funktion weder surjektiv noch injektiv ist. Wir beweisen dies nun formal.

Injektiv würde bedeuten: $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Wir wollen zeigen, dass f nicht injektiv ist, also: $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x \neq y \wedge f(x) = f(y)$.

Wir wählen $x = \frac{1}{2}$ und $y = 5$. Damit folgt:

$$f(x) = f(\frac{1}{2}) = -2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0 = 5 - 5 = y - 5 = f(y)$$

Also ist f nicht injektiv.

Surjektiv würde bedeuten: $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$.

Wir wollen zeigen, dass f nicht surjektiv ist, also: $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq y$.

Für $x \leq 2$ gilt:

$$x \leq 2 \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow -2x + 1 \geq -3 \Rightarrow f(x) \geq -3$$

Für $x > 2$ gilt:

$$x > 2 \Rightarrow x - 5 > -3 \Rightarrow f(x) > -3$$

Insgesamt gilt also: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq -3$. Mit $y = -4$ folgt: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq y$. Also ist f nicht surjektiv.

Insbesondere ist die Funktion auch nicht bijektiv, da nicht surjektiv bzw. nicht injektiv.