Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1 (Fibonacci-Zahlen)

Zeigen Sie:

(a) $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$ (2 Punkte)

(b) $2|F_{3n}$ für $n \geq 1$ (2 Punkte)

Lösung:

(a) $n = 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{0} F_{2k-1} = 0 = F_0 = F_{2\cdot 0}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} F_{2k-1} &= F_{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} F_{2n+1} + F_{2n} \\ &= F_{2n+2} \\ &= F_{2(n+1)} \end{aligned}$$

(b) $n = 1$: $F_{3n} = F_3 = 2$ und $2|2$. Damit folgt $2|F_3$ und somit $2|F_{3n}$.

$n \to n+1$: Die I.V. lautet $2|F_{3n}$, d. h. $\exists k \in \mathbb{N} : 2k = F_{3n}$.

$$\begin{aligned} F_{3(n+1)} &= F_{3n+3} \\ &= F_{3n+2} + F_{3n+1} \\ &= F_{3n+1} + F_{3n} + F_{3n+1} \\ &= 2F_{3n+1} + F_{3n} \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} 2F_{3n+1} + 2k \\ &= 2(F_{3n+1} + k) \end{aligned}$$

Wegen $F_{3n+1} \in \mathbb{N}$ folgt $\exists k' \in \mathbb{N} : 2k' = F_{3(n+1)}$, nämlich $k' = F_{3n+1} + k$.

Also: $2|F_{3(n+1)}$.

Aufgabe 2 (Explizite Formel für eine rekursiv definierte Zahlenfolge)

Die *Pell-Zahlen* P_n sind für $n \in \mathbb{N}_0$ wie folgt definiert:

$$P_0 = 0, P_1 = 1, P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$P_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

(4 Punkte)

Lösung:

$n = 0$:

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^0 - \left(1-\sqrt{2}\right)^0}{2\sqrt{2}} = \frac{1-1}{2\sqrt{2}} = 0 = P_0$$

$n = 1$:

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^1 - \left(1-\sqrt{2}\right)^1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 = P_1$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= 2P_n + P_{n-1} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} 2\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(2\left(1-\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}\right)}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(2(1+\sqrt{2})+1\right) - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(2(1-\sqrt{2})+1\right)}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(1+2\sqrt{2}+2\right) - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(1-2\sqrt{2}+2\right)}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Strukturelle Induktion)

(a) Die Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

  (i) $5 \in M$

  (ii) Gilt $x, y \in M$, dann auch $2x + y \in M$.

  (iii) Gilt $x, y \in M$, dann auch $x + y + 1 \in M$.

Zeigen Sie: $\forall m \in M : 2 \nmid m$ (4 Punkte)

(b) Die formale Sprache $\mathcal{S}$ sei über dem Alphabet $\{\bigcirc, \Box\}$ wie folgt definiert:

(i) $\bigcirc \in \mathcal{S}$ und $\bigcirc\Box\bigcirc \in \mathcal{S}$

(ii) Gilt $r, s \in \mathcal{S}$, dann gilt auch $r \Box \bigcirc \Box s \in \mathcal{S}$.

Zeigen Sie: Jedes $s \in \mathcal{S}$ enthält mehr $\bigcirc$ als $\Box$. (4 Punkte)

Lösung:

(a) Hinweis aus der Übung: $2 \nmid m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : m = 2k + 1$.

Induktionsanfang: $5 = 4 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 2k + 1$ für $k = 2$. Also: $2 \nmid 5$.

Induktionsschritt: Nach I.V. gilt $2 \nmid x$ und $2 \nmid y$. D. h.:

$$\exists k \in \mathbb{N}_0 : x = 2k + 1 \quad \wedge \quad \exists k' \in \mathbb{N}_0 : y = 2k' + 1$$

Damit folgt:

(ii)

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2(2k + 1) + (2k' + 1) \\ &= 4k + 2k' + 3 \\ &= 4k + 2k' + 2 + 1 \\ &= 2(2k + k' + 1) + 1 \end{aligned}$$

Also existiert $k'' = 2k + k' + 1$ mit $2x + y = 2k'' + 1$. Mit dem Hinweis aus der Übung folgt $2 \nmid (2x + y)$.

(iii)

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= (2k + 1) + (2k' + 1) + 1 \\ &= 2k + 2k' + 2 + 1 \\ &= 2(k + k' + 1) + 1 \end{aligned}$$

Also existiert $k''' = k + k' + 1$ mit $x + y + 1 = 2k''' + 1$. Mit dem Hinweis aus der Übung folgt $2 \nmid (x + y + 1)$.

(b) Für $s \in \mathcal{S}$ und $c \in \{\bigcirc, \Box\}$ bezeichne $|s|_c$ die Anzahl der Zeichen c in der Zeichenkette s. Mit dieser Notation lautet die zu zeigende Aussage:

$$\forall s \in \mathcal{S} : |s|_{\bigcirc} > |s|_{\Box}$$

Induktionsanfang:

$$|\bigcirc|_{\bigcirc} = 1 > 0 = |\bigcirc|_{\Box}$$

und

$$|\bigcirc\Box\bigcirc|_{\bigcirc} = 2 > 1 = |\bigcirc\Box\bigcirc|_{\Box}$$

Also ist die Aussage $|s|_{\bigcirc} > |s|_{\Box}$ wahr für die Zeichenketten s aus (i).

Induktionsschritt: Nach I.V. gilt $|r|_{\bigcirc} > |r|_{\Box}$ und $|s|_{\bigcirc} > |s|_{\Box}$ und somit $|r|_{\bigcirc} \geq |r|_{\Box} + 1$ und $|s|_{\bigcirc} \geq |s|_{\Box} + 1$

$$\begin{aligned}
|r\Box \bigcirc \Box s|_{\bigcirc} &= |r|_{\bigcirc} + |s|_{\bigcirc} + 1 \\
/ * \text{I.V.} * / \quad &\geq (|r|_{\Box} + 1) + (|s|_{\Box} + 1) + 1 \\
&= |r|_{\Box} + |s|_{\Box} + 3 \\
&> |r|_{\Box} + |s|_{\Box} + 2 \\
&= |r\Box \bigcirc \Box s|_{\Box}
\end{aligned}$$