Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Mathematische Grundlagen
Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Wintersemester 2015/16
26. November 2015

Lösungen zu Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1 (Allgemeine Beweismethoden)

Zeigen Sie mit einem direkten Beweis:

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 1 \Rightarrow 6x + 3 > 3x + 6$

(b) Es sei $\mathbb{U} = \{x | \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k + 1\}$ die Menge der ungeraden Zahlen. Damit gilt:

$$x \in \mathbb{U} \wedge y \in \mathbb{U} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{U}$$

Zeigen Sie mit einem indirekten Beweis:

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : 3|n^2 \Rightarrow 3|n$

Zeigen Sie mit einem Widerspruchsbeweis:

(d) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+ : \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (je 3 Punkte)

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} x > 1 &\Rightarrow 3x > 3 \\ &\Rightarrow 3x + 3 > 6 \\ &\Rightarrow 6x + 3 > 3x + 6 \end{aligned}$$

(b)

$$x \in \mathbb{U} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k + 1$$

$$y \in \mathbb{U} \Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z} : y = 2l + 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x \cdot y &= (2k+1)(2l+1) \\ &= 4k^2 + 2k + 2l + 1 \\ &= 2(\underbrace{2k^2 + k + l}_{:=m \in \mathbb{Z}}) + 1 \\ \Rightarrow\ & \exists m \in \mathbb{Z} : x \cdot y = 2m + 1 \\ \Rightarrow\ & x \cdot y \in \mathbb{U} \end{aligned}$$

(c) Für einen indirekten Beweis müssen wir

$$3 \nmid n \Rightarrow 3 \nmid n^2$$

zeigen. Es gilt (Hinweis aus der Übung):

$$3 \nmid n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : 3k+1 = n \vee 3k+2 = n$$

Für $n = 3k+1$ erhalten wir:

$$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(\underbrace{3k^2 + 2k}_{:=l \in \mathbb{N}_0}) + 1 = 3l + 1$$

Für $n = 3k+2$ erhalten wir:

$$n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(\underbrace{3k^2 + 4k + 1}_{:=m \in \mathbb{N}_0}) + 1 = 3m + 1$$

In beiden Fällen folgt somit $3 \nmid n^2$.

(d) Für einen Widerspruchsbeweis müssen wir aus

$$\sqrt{ab} > \frac{a+b}{2}$$

einen Widerspruch folgern, also etwas, das unter den gegebenen Voraussetzungen immer falsch ist.

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} > \frac{a+b}{2} \quad &\Rightarrow \quad ab > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&\Rightarrow \quad ab > \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\
&\Rightarrow \quad 4ab > a^2 + 2ab + b^2 \\
&\Rightarrow \quad 0 > a^2 - 2ab + b^2 \\
&\Rightarrow \quad 0 > (a-b)^2
\end{aligned}$$

Die Aussage $0 > (a-b)^2$ ist aber für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ falsch, denn $a - b \in \mathbb{R}$ und das Quadrat einer reellen Zahl ist niemals negativ.

Aufgabe 2 (Vollständige Induktion)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : 6 | (n^3 + 5n)$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}_{10} : 2^n > n^3$ (je 3 Punkte)

Lösung:

(a) $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1 \cdot 4}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{4(n+1)^3 + n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2\left(4(n+1) + n^2\right)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2\left(n^2 + 4n + 4\right)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

(b) $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= (n+1)(n+2) + \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} (n+1)(n+2) + \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{3(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(3+n)(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}
\end{aligned}$$

(c) $n = 1$:

$$1^3 + 5 \cdot 1 = 1 + 5 = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 | (1^3 + 5 \cdot 1)$$

$n \to n+1$:

- Die Induktionsvoraussetzung $6|(n^3 + 5n)$ bedeutet: $\exists k \in \mathbb{N} : 6k = n^3 + 5n$.
- Wir benötigen folgende Hilfsaussage: $\forall n : 2|n^2 + n$,
  d. h. $n^2 + n$ ist gerade. Daraus folgt dann wiederum: $\exists l \in \mathbb{N} : n^2 + n = 2l$.
  Hier eine kurze Begründung:

* Wenn n gerade ist, dann ist auch n^2 gerade und die Summe zweier gerader Zahlen ist wieder gerade.
* Wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade (siehe Aufgabe 1 (b)) und die Summer zweier ungerader Zahlen ist gerade.

Jetzt zum eigentlichen Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \\
&= (n^3 + 5n) + (3n^2 + 3n + 6) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} 6k + (3n^2 + 3n + 6) \\
&= 6k + 3(n^2 + n) + 6 \\
&= 6k + 3(2l) + 6 \\
&= 6(k + l + 1) \\
\Rightarrow \quad & 6 | (n+1)^3 + 5(n+1)
\end{aligned}$$

(d) $n = 10$:

$$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\
&\overset{\text{I.V.}}{>} 2 \cdot n^3 \\
&= n^3 + n^3 \\
&= n^3 + \underbrace{n}_{\geq 10} \cdot n^2 \\
&\geq n^3 + 10 \cdot n^2 \\
&= n^3 + 3n^2 + 7 \underbrace{n^2}_{>n} \\
&> n^3 + 3n^2 + 7n \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + \underbrace{4n}_{>1} \\
&> n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&= (n+1)^3
\end{aligned}$$