Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Mathematische Grundlagen
Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik
Wintersemester 2016/17
19. Oktober 2016

Lösungen zu Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 (Anwendung der logischen Folgerung)

Sie sollen Inspektor Columbo bei der Lösung eines Kriminalfalls helfen. Er hat drei Personen in Verdacht, die Tat (eventuell gemeinschaftlich) begangen zu haben. Inspektor Columbo stehen die folgenden Informationen zur Verfügung:

1. Nur A, B oder C kommen als Täter in Frage.
2. B arbeitet niemals allein.
3. Sind weder A noch B schuldig, dann ist auch C unschuldig.
4. C arbeitet niemals mit B.

(a) Formulieren Sie diese Sachverhalte als Menge $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\}$ von aussagenlogischen Formeln. Verwenden Sie dabei die aussagenlogischen Variablen x_A, x_B, x_C um darzustellen, dass A, B bzw. C ein Täter ist. (4 Punkte)

(b) Zeigen Sie mithilfe des Begriffs der logischen Folgerung, dass A ein Täter ist, also, dass

$$\mathcal{F} \models x_A$$

gilt. (4 Punkte)

(c) Wie müsste ein Gericht über B und C urteilen?

- Schuldig wegen nachgewiesener Tatbeteiligung?
- Freispruch wegen erwiesener Unschuld?
- Freispruch wegen Mangels an Beweisen?

Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie dabei auch an, wie Sie diese drei Fälle als logische Folgerung modellieren würden. (3 Punkte)

Lösung:

(a) 1. Nur A, B oder C kommen als Täter in Frage.

$$x_A \vee x_B \vee x_C$$

2. B arbeitet niemals allein (im Sinne von: Wenn B ein Täter ist, dann auch A oder C):

$$x_B \to (x_A \vee x_C)$$

Achtung: Falsch wäre $x_B \wedge (x_A \vee x_C)$ und damit auch $(x_B \wedge x_A) \vee (x_B \wedge x_C)$. Im Gegensatz zur richtigen Formel würden Sie bei diesen Formeln davon ausgehen, dass B ein Täter ist.

3. Sind weder A noch B schuldig, dann ist auch C unschuldig:

$$(\neg x_A \wedge \neg x_B) \to \neg x_C$$

4. C arbeitet niemals mit B (im Sinne von: Wenn C Täter ist, dann ist B kein Täter):

$$x_C \to \neg x_B$$

Äquivalente Formulierungen sind:

- C und B sind niemals zusammen schuldig: $\neg(x_C \wedge x_B)$.
- Von C und B ist mindestens einer unschuldig: $\neg x_C \vee \neg x_B$.
- Wenn B Täter ist, kann C kein Täter sein: $x_B \to \neg x_C$.

Falsch wäre dagegen $x_C \oplus x_B$, denn dies würde bedeuten, dass entweder C oder B Täter ist. Dies schließt aber die Möglichkeit aus, dass weder C noch B Täter ist.

(b) Wir nutzen eine Wahrheitstafel:

x_A	x_B	x_C	$x_A \vee x_B \vee x_C$	$x_B \to (x_A \vee x_C)$	$(\neg x_A \wedge \neg x_B) \to \neg x_C$	$x_C \to \neg x_B$	Modell?
0	0	0	0				–
0	0	1			0		–
0	1	0		0			–
0	1	1				0	–
1	0	0	1	1	1	1	+
1	0	1	1	1	1	1	+
1	1	0	1	1	1	1	+
1	1	1				0	–

In jedem Modell ist x_A wahr. Also gilt $\mathcal{F} \models x_A$.

Alternativ könnte man natürlich auch zeigen, dass die Menge

$$\{x_A \vee x_B \vee x_C, x_B \to (x_A \vee x_C), (\neg x_A \wedge \neg x_B) \to \neg x_C, x_C \to \neg x_B\}$$

unerfüllbar ist.

(c) Wir modellieren die drei möglichen Urteile als logische Folgerung.

- Schuldig wegen nachgewiesener Tatbeteiligung?
  Hierfür müsste x_B bzw. x_C eine logische Folgerung der uns zur Verfügung stehenden Informationen sein, also
  $$\mathcal{F} \models x_B \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{F} \models x_C.$$
  Beides ist aber nicht gegeben, denn es gibt Modelle, in denen x_B bzw. x_C falsch ist.

- Freispruch wegen erwiesener Unschuld?

  Hierfür müsste $\neg x_B$ bzw. $\neg x_C$ eine logische Folgerung der uns zur Verfügung stehenden Informationen sein, also

$$\mathcal{F} \models \neg x_B \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{F} \models \neg x_C.$$

  Beides ist aber wieder nicht gegeben, denn es gibt Modelle, in denen x_B bzw. x_C wahr und somit $\neg x_B$ bzw. $\neg x_C$ falsch ist.

- Freispruch wegen Mangels an Beweisen?

  Trifft zu, wenn sowohl $\mathcal{F} \not\models x_B$ als auch $\mathcal{F} \not\models \neg x_B$ gilt, analog für C. Dies ist hier der Fall. Also müssen B und C wegen Mangels an Beweisen freigesprochen werden.

Aufgabe 2 (Logische Äquivalenz)

(a) Zeigen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen:

- $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$
- $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$ (2 Punkte)

(b) Wir definieren Syntax und Semantik des dreistelligen logischen Operators $\clubsuit(\ ,\ ,\ )$ durch die folgende Wahrheitstafel:

α	β	γ	$\clubsuit(\alpha, \beta, \gamma)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Stellen Sie eine aussagenlogische Formel auf, die logisch äquivalent zu $\clubsuit(\alpha, \beta, \gamma)$ ist und als Operatoren nur Klammern sowie $\neg, \wedge, \vee$ verwendet. (3 Punkte)

Lösung:

(a) Wir müssen zeigen, dass für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^*((\alpha \vee \beta) \wedge \gamma) &= \mathcal{I}^*((\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)) \\
\mathcal{I}^*((\alpha \wedge \beta) \vee \gamma) &= \mathcal{I}^*((\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma))
\end{aligned}$$

Hierzu nutzen wir Wahrheitstafeln. Für die erste Formel:

α	β	γ	$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$	$(\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Für die zweite Formel:

α	β	γ	$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$	$(\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

(b) Wir gehen wie folgt vor:

- Für jede Zeile der Wahrheitstafel mit einer 1 in der Ergebnisspalte stellen wir eine Konjunktionen auf, die genau für diese Belegung wahr wird.

α	β	γ	$\clubsuit(\alpha, \beta, \gamma)$	Konjunktion
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\neg\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma$
0	1	1	1	$\neg\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$\alpha \wedge \neg\beta \wedge \gamma$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$

- Anschließend bilden wir eine Disjunktionen aller so aufgestellten Konjunktionen.

$$\clubsuit(\alpha, \beta, \gamma) \equiv (\neg\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \vee (\neg\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \vee (\alpha \wedge \neg\beta \wedge \gamma) \vee (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$$

  Dies ist eine Darstellung in disjunktiver Normalform mithilfe sogenannter min-Terme.

Eine alternative Vorgehensweise ist:

- Für jede Zeile der Wahrheitstafel mit einer 0 in der Ergebnisspalte stellen wir eine Disjunktion auf, die genau diese Belegung falsch macht.

α	β	γ	$\clubsuit(\alpha, \beta, \gamma)$	Disjunktionen
0	0	0	0	$\alpha \vee \beta \vee \gamma$
0	0	1	0	$\alpha \vee \beta \vee \neg\gamma$
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	$\neg\alpha \vee \beta \vee \gamma$
1	0	1	1	
1	1	0	0	$\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma$
1	1	1	1	

- Anschließend bilden wir eine Konjunktion aller so aufgestellter Disjunktionen.

$$\clubsuit(\alpha, \beta, \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \beta \vee \neg\gamma) \wedge (\neg\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma)$$

  Dies ist eine Darstellung in konjunktiver Normalform mithilfe sogenannter max-Terme.