Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Mathematische Grundlagen
Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik
Wintersemester 2016/17
7. Oktober 2016

Lösungen zu Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1 (Syntax der Aussagenlogik)

(a) Zeigen Sie schrittweise (z. B. wie in Beispiel 2.1 (ii)), dass

$$(((x \wedge \neg y) \vee (\underline{0} \vee \neg z)) \wedge \neg x)$$

eine aussagenlogische Formel ist. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass

$$(\underline{1}\,\underline{1} \vee x)$$

keine aussagenlogische Formel ist. (2 Punkte)

Lösung: Hinweis: (i), (ii) und (iii) beziehen sich auf die Definition einer aussagenlogischen Formel (Folie 43). Die Menge der aussagenlogischen Formeln bezeichnen wir mit $\mathcal{A}$.

(a)

(1) wegen (i) gilt $\underline{0} \in \mathcal{A}$.
(2) wegen (ii) gilt $x, y, z \in \mathcal{A}$.
(3) wegen (2) und (iii) gilt $\neg x, \neg y, \neg z \in \mathcal{A}$.
(4) wegen (2), (3) und (iii) gilt $(x \wedge \neg y) \in \mathcal{A}$.
(5) wegen (1), (3) und (iii) gilt $(\underline{0} \vee \neg z) \in \mathcal{A}$.
(6) wegen (4), (5) und (iii) gilt $((x \wedge \neg y) \vee (\underline{0} \vee \neg z)) \in \mathcal{A}$.
(7) wegen (3), (6) und (iii) gilt $(((x \wedge \neg y) \vee (\underline{0} \vee \neg z)) \wedge \neg x) \in \mathcal{A}$.

(b)
- Wenn $(\underline{1}\,\underline{1} \vee x) \in \mathcal{A}$ gilt, dann kann diese Formel nur durch die Regel $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{A}$ von (iii) erzeugt worden sein.
- Die Formel ist also genau dann $\in \mathcal{A}$, wenn $\underline{1}\,\underline{1} \in \mathcal{A}$ und $x \in \mathcal{A}$ gilt.
- Es gilt aber $\underline{1}\,\underline{1} \notin \mathcal{A}$, denn die Zeichenkette $\underline{1}\,\underline{1}$ passt auf keine der Regeln (i), (ii) und (iii).

Aufgabe 2 (Rekursiv definierte Mengen)

(a) Die Menge M bestehe genau aus den Zahlen, die durch die folgenden Regeln erzeugt werden können:

(i) $3 \in M$

(ii) Gilt $x \in M$ und $4x + 2 \leq 100$, dann ist auch $4x + 2 \in M$.

(iii) Gilt $x \in M$ und $3x + 1 \leq 100$, dann ist auch $3x + 1 \in M$.

Geben Sie die Menge M in aufzählender Form an. Machen Sie auch Ihre Herleitung deutlich. (3 Punkte)

(b) Die formale Sprache $\mathcal{S}$ sei (als Menge) über dem Alphabet $\{\bigcirc, \square\}$ wie folgt definiert:

(i) $\bigcirc\bigcirc \in \mathcal{S}$ und $\square \in \mathcal{S}$

(ii) Gilt $\alpha \in \mathcal{S}$, dann gilt auch $\bigcirc\alpha\bigcirc \in \mathcal{S}$, $\bigcirc \bigcirc \alpha \in \mathcal{S}$ und $\square\alpha \in \mathcal{S}$.

Zeigen Sie:

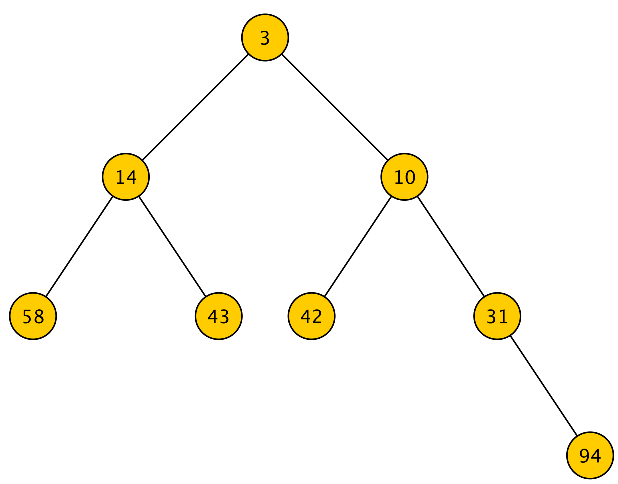
- $\bigcirc \bigcirc \square \bigcirc \square\square\square\bigcirc \in \mathcal{S}$
- $\bigcirc \bigcirc \bigcirc \notin \mathcal{S}$ (4 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt $M = \{3, 10, 14, 31, 42, 43, 58, 94\}$. Herleitung:

Wegen (i) gilt $3 \in M$.
Aus $3 \in M$ folgt mit (ii) $14 \in M$.
Aus $3 \in M$ folgt mit (iii) $10 \in M$.
Aus $14 \in M$ folgt mit (ii) $58 \in M$.
Aus $14 \in M$ folgt mit (iii) $43 \in M$.
Aus $10 \in M$ folgt mit (ii) $42 \in M$.
Aus $10 \in M$ folgt mit (iii) $31 \in M$.
Aus $31 \in M$ folgt mit (iii) $94 \in M$.

Veranschaulichung:



(b) Wir zeigen $\bigcirc \bigcirc \square \bigcirc \square\square\square\bigcirc \in \mathcal{S}$.

(1) Wegen (i) gilt $\square \in \mathcal{S}$
(2) Wegen (1) und (ii: $\square\alpha$) gilt $\square\square \in \mathcal{S}$.
(3) Wegen (2) und (ii: $\square\alpha$) gilt $\square\square\square \in \mathcal{S}$.
(4) Wegen (3) und (ii: $\bigcirc\alpha\bigcirc$) gilt $\bigcirc\square\square\square\bigcirc \in \mathcal{S}$.
(5) Wegen (4) und (ii: $\square\alpha$) gilt $\square \bigcirc \square\square\square\bigcirc \in \mathcal{S}$.
(6) Wegen (5) und (ii: $\bigcirc \bigcirc \alpha$) gilt $\bigcirc \bigcirc \square \bigcirc \square\square\square\bigcirc \in \mathcal{S}$.

Hinweis: Dies ist nicht die einzige mögliche Herleitung.

Jetzt zegen wir $\bigcirc\bigcirc\bigcirc \notin \mathcal{S}$.

Würde $\bigcirc\bigcirc\bigcirc \in \mathcal{S}$ gelten, dann könnte diese Zeichenkette nur durch die Regeln (ii: $\bigcirc\alpha\bigcirc$) oder (ii: $\bigcirc\bigcirc\alpha$) erzeugt worden sein. In beiden Fällen müsste dann $\bigcirc \in \mathcal{S}$ gelten.

Die Zeichenkette $\bigcirc$ kann aber weder aus (i) noch aus (ii) hergeleitet werden, denn in den Regeln treten immer zwei $\bigcirc$ oder ein $\square$ auf. Beides trifft auf die Zeichenkette $\bigcirc$ nicht zu.

Aufgabe 3 (Interpretation)

Es sei $\alpha = ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$.

(a) Berechnen Sie schrittweise (wie in Beispiel 2.4) $\mathcal{I}^*(\alpha)$ für

- $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = 1$,
- $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = 0$. (4 Punkte)

(b) Gibt es eine Belegung $\mathcal{I} \in \mathcal{I}_\alpha$ mit $\mathcal{I}^*(\alpha) = 1$? (2 Punkte)

Lösung:

(a) Für $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = 1$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{I}^*((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \\
= \; & \max\{\mathcal{I}^*(p \wedge \neg q), \mathcal{I}^*(\neg p \wedge q)\} \\
= \; & \max\{\min\{\mathcal{I}^*(p), \mathcal{I}^*(\neg q)\}, \min\{\mathcal{I}^*(\neg p), \mathcal{I}^*(q)\}\} \\
= \; & \max\{\min\{\mathcal{I}^*(p), 1 - \mathcal{I}^*(q)\}, \min\{1 - \mathcal{I}^*(p), \mathcal{I}^*(q)\}\} \\
= \; & \max\{\min\{\mathcal{I}(p), 1 - \mathcal{I}(q)\}, \min\{1 - \mathcal{I}(p), \mathcal{I}(q)\}\} \\
= \; & \max\{\min\{1, 1 - 1\}, \min\{1 - 1, 1\}\} \\
= \; & \max\{\min\{1, 0\}, \min\{0, 1\}\} \\
= \; & \max\{0, 0\} \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

Für $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = 0$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{I}^*((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \\
= \; & \max\{\mathcal{I}^*(p \wedge \neg q), \mathcal{I}^*(\neg p \wedge q)\} \\
= \; & \max\{\min\{\mathcal{I}^*(p), \mathcal{I}^*(\neg q)\}, \min\{\mathcal{I}^*(\neg p), \mathcal{I}^*(q)\}\} \\
= \; & \max\{\min\{\mathcal{I}^*(p), 1 - \mathcal{I}^*(q)\}, \min\{1 - \mathcal{I}^*(p), \mathcal{I}^*(q)\}\} \\
= \; & \max\{\min\{\mathcal{I}(p), 1 - \mathcal{I}(q)\}, \min\{1 - \mathcal{I}(p), \mathcal{I}(q)\}\} \\
= \; & \max\{\min\{0, 1 - 0\}, \min\{1 - 0, 0\}\} \\
= \; & \max\{\min\{0, 1\}, \min\{1, 0\}\} \\
= \; & \max\{0, 0\} \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

(b) Ja. Für $\mathcal{I}(p) = 1, \mathcal{I}(q) = 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{I}^*((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \\
= \; & \max\{\mathcal{I}^*(p \wedge \neg q), \mathcal{I}^*(\neg p \wedge q)\} \\
= \; & \max\{\min\{\mathcal{I}^*(p), \mathcal{I}^*(\neg q)\}, \min\{\mathcal{I}^*(\neg p), \mathcal{I}^*(q)\}\} \\
= \; & \max\{\min\{\mathcal{I}^*(p), 1 - \mathcal{I}^*(q)\}, \min\{1 - \mathcal{I}^*(p), \mathcal{I}^*(q)\}\} \\
= \; & \max\{\min\{\mathcal{I}(p), 1 - \mathcal{I}(q)\}, \min\{1 - \mathcal{I}(p), \mathcal{I}(q)\}\} \\
= \; & \max\{\min\{1, 1 - 0\}, \min\{1 - 1, 0\}\} \\
= \; & \max\{\min\{1, 1\}, \min\{0, 0\}\} \\
= \; & \max\{1, 0\} \\
= \; & 1
\end{aligned}$$