Lösungen zu Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1 (Eigenschaften von Relationen)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $xRy :\Leftrightarrow |x - y| \leq 2$

(b) $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $xRy :\Leftrightarrow (x = y = 0) \vee (xy > 0)$

(c) $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $X\,R\,Y :\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x \in X \wedge x \in Y$ (je 2 Punkte)

Lösung:

(a) reflexiv: Für $x \in \mathbb{N}$ gilt: $|x - x| = 0 \leq 2$. Also gilt xRx und somit ist R reflexiv.

symmetrisch:

$$xRy \Rightarrow |x - y| \leq 2 \Rightarrow |y - x| \leq 2 \Rightarrow yRx$$

Also ist R symmetrisch.

transitiv: R ist nicht transitiv, denn es gilt $(1, 3) \in R$ und $(3, 5) \in R$ aber $(1, 5) \notin R$.

(b) reflexiv:

1. $x = 0$
   Dann gilt xRx wegen $x = x = 0$.
2. $x \neq 0$
   Dann gilt xRx wegen $x \cdot x = x^2 > 0$.

Also ist R reflexiv.

symmetrisch: Gelte xRy.

1. $x = y = 0 \Rightarrow y = x = 0 \Rightarrow yRx$
2. $xy > 0 \Rightarrow yx > 0 \Rightarrow yRx$

Also ist R symmetrisch.

transitiv: Gelte xRy und yRz.

1. $x = 0$. Dann folgt $y = 0$ (weil die Bedingung $xy > 0$ für $x = 0$ nicht erfüllbar ist) und auf analoge Weise auch $z = 0$. Aus $x = z = 0$ ergibt sich dann xRz.

2. $x \neq 0$. Dann folgt $y \neq 0$ (weil für $y = 0$ und $x \neq 0$ weder $x = y = 0$ noch $xy > 0$ erfüllbar ist) und auf analoge Weise auch $z \neq 0$.

   Wegen $xy > 0$ müssen x und y das gleiche Vorzeichen haben, ebenso müssen y und z das gleiche Vorzeichen haben. Also hat auch x das gleiche Vorzeichen wie z und somit folgt $xz > 0$, also xRz.

Also ist R transitiv.

(c) reflexiv: R ist nicht reflexiv, denn für $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gilt $(\emptyset, \emptyset) \notin R$. Für die leere Menge ist die Existenzbedingung nicht erfüllbar.

symmetrisch:

$$X\,R\,Y \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x \in X \wedge x \in Y \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x \in Y \wedge x \in X \Rightarrow Y\,R\,X$$

Also ist R symmetrisch.

transitiv: R ist nicht transitiv, denn es gilt $\{1,2\}R\{2,3\}$ und $\{2,3\}R\{3,4\}$, aber $\{1,2\} \cap \{3,4\} = \emptyset$ und somit $(\{1,2\},\{3,4\}) \notin R$.

Aufgabe 2 (Partielle Ordnung und Äquivalenzrelation)

(a) Es sei $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit

$$xRy \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}_0 : y = 2^k x$$

Zeigen Sie, dass R eine partielle Ordnung ist. (3 Punkte)

(b) Ist die Relation R aus (a) eine totale Ordnung? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

(c) Es sei $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ mit

$$(a,b)R(c,d) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{Z}\, \exists \mu \in \mathbb{Z} : \lambda \neq 0 \wedge \mu \neq 0 \wedge (\mu a = \lambda c) \wedge (\mu b = \lambda d)$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. (4 Punkte)

Lösung:

(a) reflexiv: Für $x \in \mathbb{N}$ gilt $x = 1x = 2^0 x = 2^k x$ für $k = 0 \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt xRx für alle $x \in \mathbb{N}$.

antisymmetrisch: $xRy \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : y = 2^k x$ und $yRx \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}_0 : x = 2^{k'} y$.

Damit folgt: $y = 2^k x = 2^k 2^{k'} y = 2^{k+k'} y$ und weiter:

$$y = 2^{k+k'} y \Rightarrow 2^{k+k'} = 1 \Rightarrow k + k' = 0 \Rightarrow k = k' = 0 \Rightarrow x = y$$

transitiv: $xRy \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : y = 2^k x$ und $yRz \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}_0 : z = 2^{k'} y$.

Damit folgt: $z = 2^{k'} y = 2^{k'} 2^k x = 2^{k+k'} x$ und somit xRz.

(b) R ist keine totale Ordnung. Hierfür müsste gelten:

$$\forall x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N} : xRy \vee yRx$$

Es gilt aber beispielsweise $(1,3) \notin R$ und $(3,1) \notin R$.

(c) reflexiv: Sei $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Wähle $\lambda = \mu = 1$. Dann gilt

$$\mu a = \lambda a \quad \wedge \quad \mu b = \lambda b$$

und somit $(a,b)R(a,b)$. Damit ist R reflexiv.

symmetrisch: Gelte $(a,b)R(c,d)$, d. h. es existieren $\lambda, \mu \neq 0$ mit $\mu a = \lambda c$ und $\mu b = \lambda d$. Wähle $\mu' = \lambda$ und $\lambda' = \mu$. Damit folgt

$$\mu' c = \lambda' a \quad \wedge \quad \mu' d = \lambda' b$$

und somit $(c,d)R(a,b)$.

transitiv: Es gilt:

$$\begin{aligned} (a,b)R(c,d) &\Rightarrow \mu a = \lambda c \wedge \mu b = \lambda d \\ (c,d)R(e,f) &\Rightarrow \mu' c = \lambda' e \wedge \mu' d = \lambda' f \end{aligned}$$

Durch geeignete Multiplikation der Gleichungen entsteht

$$\mu\mu' a = \lambda\mu' c = \lambda\lambda' e$$

und

$$\mu\mu' b = \lambda\mu' d = \lambda\lambda' f$$

Mit $\mu'' = \mu\mu'$ und $\lambda'' = \lambda\lambda'$ folgt

$$\mu'' a = \lambda'' e \quad \wedge \quad \mu'' b = \lambda'' f$$

und somit $(a,b)R(e,f)$.

Aufgabe 3 (Verknüpfung partieller Ordnungen)

Seien $R \subseteq A \times A$ und $S \subseteq A \times A$ partielle Ordnungen über A.

(a) Zeigen Sie: $R \cap S$ ist ebenfalls eine partielle Ordnung. (3 Punkte)

(b) Ist auch $R \cup S$ eine partielle Ordnung? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Lösung:

(a) reflexiv: Sei $x \in A$. Da R partielle Ordnung und somit reflexiv ist, gilt $(x,x) \in R$. Analog folgt $(x,x) \in S$. Damit gilt $(x,x) \in R \cap S$.

antisymmetrisch: Seien $(x,y),(y,x) \in R \cap S$. Wegen $R \cap S \subseteq R$ folgt $(x,y),(y,x) \in R$. Da R partielle Ordnung ist, folgt $x = y$. Also ist $R \cap S$ antisymmetrisch.

transitiv: Seien $(x,y),(y,z) \in R \cap S$. Da R transitiv folgt $(x,z) \in R$. Analog folgt, da auch S transitiv ist, $(x,z) \in S$. Somit gilt $(x,z) \in R \cap S$.

(b) Im Allgemeinen ist $R \cup S$ keine partielle Ordnung. Beispiel: Seien

$$\begin{aligned} A &= \{a,b,c\} \\ R &= \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)\} \\ S &= \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c)\} \end{aligned}$$

Dann sind R und S partielle Ordnungen, aber nicht $R \cup S$. Begründung: $R \cup S$ ist nicht transitiv: Es gilt $(a,b),(b,c) \in R \cup S$, aber $(a,c) \notin R \cup S$.