Mathematische Grundlagen
Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik
Wintersemester 2016/17
9. Dezember 2016

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1 (Operationen auf Mengen)

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$
\begin{aligned}
A &:= \{\text{Fortuna Köln}, \text{1860 München}, \text{RB Leipzig}, \text{1899 Hoffenheim}, \text{Bonner SC}\}\\
B &:= \{\text{RB Leipzig}, \text{Bonner SC}, \text{FC Liverpool}\}\\
C &:= \{\text{CF Barcelona}\}\\
D &:= \emptyset
\end{aligned}
$$

Bilden Sie die folgenden Mengen: $A \cap B, D \cup B, B \times C, C \times B, \mathcal{P}(B), D \setminus C$. (3 Punkte)

Lösung:

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \{\text{RB Leipzig}, \text{Bonner SC}\}\}\\
D \cup B &= B = \{\text{RB Leipzig}, \text{Bonner SC}, \text{FC Liverpool}\}\\
B \times C &= \{(\text{RB Leipzig}, \text{CF Barcelona}), (\text{Bonner SC}, \text{CF Barcelona}), (\text{FC Liverpool}, \text{CF Barcelona})\}\\
C \times B &= \{(\text{CF Barcelona}, \text{RB Leipzig}), (\text{CF Barcelona}, \text{Bonner SC}), (\text{CF Barcelona}, \text{FC Liverpool})\}\\
\mathcal{P}(B) &= \{\emptyset, \{\text{RB Leipzig}\}, \{\text{Bonner SC}\}, \{\text{FC Liverpool}\}, \{\text{RB Leipzig}, \text{Bonner SC}\},\\
&\quad \{\text{RB Leipzig}, \text{FC Liverpool}\}, \{\text{Bonner SC}, \text{FC Liverpool}\},\\
&\quad \{\text{RB Leipzig}, \text{Bonner SC}, \text{FC Liverpool}\}\}\\
D \setminus C &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (Verknüpfungseigenschaften)

Es seien A, B, D Mengen. Zeigen Sie:

(a) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

(b) $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$

(c) $A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D)$

(d) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen. Zeigen Sie:

(e) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^C$ Hinweis: vollständige Induktion (je 2 Punkte)

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^C &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in A^C \vee x \in B^C \\ &\Leftrightarrow x \in A^C \cup B^C \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup D) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup D \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap D) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap D) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (x,y) \in A \times (B \cup D) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup D \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times D \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times D) \end{aligned}$$

(d) "$\Leftarrow$": Es gelte $A \subseteq B$, d. h. $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\Rightarrow x \in B \vee x \in B \\ &\Rightarrow x \in B \end{aligned}$$

Also $A \cup B \subseteq B$.

Weiterhin gilt immer $B \subseteq A \cup B$ (siehe Satz 5.9 (5)).

Also $A \cup B = B$.

"$\Rightarrow$": Wir zeigen diese Richtung mit einem indirekten Beweis, d. h. wir zeigen:

$$A \nsubseteq B \Rightarrow A \cup B \neq B$$

$A \nsubseteq B \Rightarrow \exists x : x \in A \wedge x \notin B$.

Wegen $x \in A$ folgt $x \in A \cup B$.

Also gilt $x \in A \cup B \wedge x \notin B$ und somit $A \cup B \neq B$.

(e) $n = 1$:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{1} A_i \right)^C = (A_1)^C = A_1^C = \bigcup_{i=1}^{1} A_i^C$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)^C &= \left(A_{n+1} \cap \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}_{:=B}\right)^C \\
&= (A_{n+1} \cap B)^C \\
&\overset{(a)}{=} A_{n+1}^C \cup B^C \\
&= A_{n+1}^C \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^C \\
&\overset{I.V.}{=} A_{n+1}^C \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i^C \\
&= \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i^C
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Beweis für Mengengleichheit)

(a) Zeigen Sie:

$$\{7m - 8 | m \in \mathbb{Z}\} = \{7m + 13 | m \in \mathbb{Z}\}$$

(3 Punkte)

(b) Für $i \in \mathbb{N}$ sei $A_i = \{x \in \mathbb{R} | 1 - \frac{1}{i} \leq x \leq 2 + \frac{1}{i}\}$. Zeigen Sie:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\}$$

Hinweis: Dies ist der Beweis zu Beispiel 5.8. (4 Punkte)

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
x \in \{7m - 8 | m \in \mathbb{Z}\} &\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x = 7m - 8 \\
&\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x = 7m - 21 + 21 - 8 \\
&\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x = 7m - 3 \cdot 7 + 13 \\
&\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x = 7(m - 3) + 13 \\
&\Leftrightarrow \exists m' \in \mathbb{Z} : x = 7m' + 13 \\
&\Leftrightarrow x \in \{7m + 13 | m \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

(b) "$\supseteq$":

$$\begin{aligned}
x \in \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\} &\Rightarrow x \geq 1 \wedge x \leq 2 \\
&\Rightarrow x \geq 1 - \frac{1}{i} \wedge x \leq 2 + \frac{1}{i} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow x \in A_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i
\end{aligned}$$

“$\subseteq$”: Diese Richtung zeigen wir indirekt, d. h. wir zeigen:

$$x \notin \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\} \quad \Rightarrow \quad x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Aus $x \notin \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\}$ folgt $x < 1 \vee x > 2$.

1. $x > 2$
   Dann gilt $x - 2 > 0$. Wähle $i \in \mathbb{N}$ mit $i > \frac{1}{x-2}$.

$$\begin{aligned} i > \frac{1}{x-2} \quad &\Rightarrow \quad x - 2 > \frac{1}{i} \\ &\Rightarrow \quad x > 2 + \frac{1}{i} \\ &\Rightarrow \quad x \notin A_i \\ &\Rightarrow \quad x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \end{aligned}$$

2. $x < 1$
   Dann gilt $1 - x > 0$. Wähle $i \in \mathbb{N}$ mit $i > \frac{1}{1-x}$.

$$\begin{aligned} i > \frac{1}{1-x} \quad &\Rightarrow \quad 1 - x > \frac{1}{i} \\ &\Rightarrow \quad x - 1 < -\frac{1}{i} \\ &\Rightarrow \quad x < 1 - \frac{1}{i} \\ &\Rightarrow \quad x \notin A_i \\ &\Rightarrow \quad x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \end{aligned}$$