Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Mathematische Grundlagen

Klausur Wintersemester 2016/17

29. März 2017, 8:30–10:00 Uhr

Name: **Vorname:**

Matrikelnr.: **Unterschrift:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreicht							

- Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden, ab 48 Punkten erhalten Sie eine 1.0.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sie müssen Ihre Antworten begründen.
- **Tipp:** Schauen Sie sich erstmal alle Aufgaben an.

Viel Erfolg!

Bemerkungen:

Note

1. Prüfer (Prof. Dr. Peter Becker)

2. Prüfer (Prof. Dr. Alexander Asteroth)

Aufgabe 1 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Begründen oder widerlegen Sie:

(a) $\neg(q \to p) \land \neg r$ ist erfüllbar.

(b) $p \land q \to p \lor q$ ist eine Tautologie.

(c) $p \to (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_n) \equiv \neg(\neg q_1 \land \neg q_2 \land \ldots \land \neg q_n) \lor \neg p$

(d) Wenn $\alpha \land \neg\beta$ unerfüllbar ist, dann gilt $\{\alpha\} \models \beta$.

Aufgabe 2 (3+7=10 Punkte)

(a) Überführen Sie die Formel

$$(p \wedge (q \to r)) \to (s \vee t)$$

in konjunktive Normalform und geben Sie die Klauselmenge an.

(b) Gegeben sind die folgenden Klauseln:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{a, \neg b, \neg c\} \\ K_2 &= \{c, d, e\} \\ K_3 &= \{b, e\} \\ K_4 &= \{a, \neg d\} \\ K_5 &= \{\neg a\} \end{aligned}$$

Zeige Sie mithilfe der Resolution: $\{K_1, \ldots, K_5\} \models e$

Aufgabe 3 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Gegeben sei die prädikatenlogischen Belegung mit dem Universium

$$U = \{a, b\}$$

und

$$\begin{aligned} P &= \{b\} \\ Q &= \{a\} \end{aligned}$$

für die einstelligen Prädikate P und Q.

Sind die beiden folgenden Formeln wahr oder falsch (mit Begründung):

(a) $(\forall x(Q(x) \to \neg P(x)))$

(b) $(\exists y(P(y) \wedge Q(y)))$

Formulieren Sie in strenger prädikatenlogischer Syntax die folgenden Sachverhalte:

(c) P und Q enthalten die gleichen Elemente.

(d) Es gibt ein Element, dass weder in P noch in Q ist.

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (4k-1) = 2n^2 + n$$

(b) Die Menge M ist durch die folgenden Regeln definiert:

(i) $7 \in M$

(ii) Gilt $x, y \in M$, dann gilt auch $3(x+3) + y - 2 \in M$.

(iii) M enthält genau die Elemente, die durch die Regeln (i) und (ii) gebildet werden können.

Zeigen Sie: $\forall x \in M : 7 | x$

Aufgabe 5 (2+2+2+4=10 Punkte)

Sind die folgenden Relationen $R_i, i = 1, 2, 3, 4$ Äquivalenzrelationen auf der Grundmenge $\mathbb{N}$? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $R_1 = \{(n, m) | f(n) \neq f(m)\}$ für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(b) $R_2 = \{(n, m) | \frac{1}{3} \leq \frac{n}{m} \leq 3\}$

(c) $R_3 = \{(n, m) | 3n - 3m \geq 0\}$

(d) $R_4 = \{(n, m) | \text{Die letzten Ziffern von } n \text{ und } m \text{ sind gleich}\}$

Aufgabe 6 (4+6=10 Punkte)

(a) Sei $f : M \to N$, $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{falls } x \leq 2 \\ x - 5 & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.