Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

# Mathematische Grundlagen

## Klausur Sommersemester 2017

**29. September 2017, 13:00–14:30 Uhr**

**Name:** **Vorname:**

**Matrikelnr.:** **Unterschrift:**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 10 | 10 | 10 | 12 | 8 | 10 | 60 |
| erreicht | | | | | | | |

- Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden, ab 48 Punkten erhalten Sie eine 1.0.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sie müssen Ihre Antworten begründen.
- **Tipp:** Schauen Sie sich erstmal alle Aufgaben an.

**Viel Erfolg!**

Bemerkungen:

Note

1. Prüfer (Prof. Dr. Peter Becker)

2. Prüfer (Prof. Dr. Alexander Asteroth)

## Aufgabe 1 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) $((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$ ist eine Tautologie.

(b) $\neg r \land p \land \neg(q \to r)$ ist erfüllbar.

(c)

$$\begin{aligned} & (p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n) \to (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_m) \\ \equiv\ & (p_1 \to (q_1 \lor \ldots \lor q_m)) \land (p_2 \to (q_1 \lor \ldots \lor q_m)) \land \ldots \land (p_n \to (q_1 \lor \ldots \lor q_m)) \end{aligned}$$

(d) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta_1 \lor \beta_2$ gilt genau dann, wenn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta_1, \neg\beta_2\}$ unerfüllbar ist.

## Aufgabe 2 (3+7=10 Punkte)

(a) Überführen Sie die Formel

$$(p \vee q \vee r) \rightarrow (s \rightarrow t)$$

in konjunktive Normalform und geben Sie die Klauselmenge an.

(b) Gegeben sind die folgenden Klauseln:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\neg a, \neg b, c\} \\ K_2 &= \{\neg c, d\} \\ K_3 &= \{a, d\} \\ K_4 &= \{\neg d\} \end{aligned}$$

Zeige Sie mithilfe der Resolution: $\{K_1, \ldots, K_4\} \models a \wedge \neg b$

## Aufgabe 3 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Gegeben sei die prädikatenlogischen Belegung mit dem Universium

$$U = \{a, b, c\}$$

und

$$\begin{aligned} P &= \{a, b\} \\ Q &= \{b, c\} \end{aligned}$$

für die einstelligen Prädikate $P$ und $Q$.

Sind die beiden folgenden Formeln wahr oder falsch (mit Begründung):

(a) $(\exists x(Q(x) \to \neg P(x)))$

(b) $(\forall y(\neg P(y) \vee \neg Q(y)))$

Formulieren Sie in strenger prädikatenlogischer Syntax die folgenden Sachverhalte:

(c) $P$ und $Q$ haben ein gemeinsames Element.

(d) Wenn $P$ leer ist, dann enthält $Q$ alle Elemente (des Universums).

## Aufgabe 4 (6+6=12 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} k^2 = n(2n-1)$$

(b) Die Menge $M$ ist durch die folgenden Regeln definiert:

(i) $3 \in M$ und $5 \in M$

(ii) Gilt $x, y \in M$, dann gilt auch $17x + 22y \in M$.

(iii) $M$ enthält genau die Elemente, die durch die Regeln (i) und (ii) gebildet werden können.

Zeigen Sie: Alle Elemente von $M$ sind ungerade.

## Aufgabe 5 (2+2+4=8 Punkte)

Sind die folgenden Relationen $R_i, i = 1, 2, 3$ partielle Ordnungen auf der Grundmenge $\mathbb{N}$? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $R_1 = \{(n, m) | n - 1 \leq m\}$

(b) $R_2 = \{(n, m) | n + 1 \leq m\}$

(c) $R_3 = \{(n, m) | (n \text{ und } m \text{ sind entweder beide gerade oder beide ungerade) und } n \leq m\}$

## Aufgabe 6 (4+6=10 Punkte)

(a) Sei $f : M \to N$, $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{falls } x < 2 \\ 3x - 1 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f$ bijektiv ist.