Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Mathematische Grundlagen

Klausur Sommersemester 2016

16. September 2016, 13:00–14:30 Uhr

Name: **Vorname:**

Matrikelnr.: **Unterschrift:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreicht							

- Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden, ab 48 Punkten erhalten Sie eine 1.0.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sie müssen Ihre Antworten begründen.
- **Tipp:** Schauen Sie sich erstmal alle Aufgaben an.

Viel Erfolg!

Bemerkungen:

Note

1. Prüfer (Prof. Dr. Peter Becker)

2. Prüfer (Prof. Dr. Alexander Asteroth)

Aufgabe 1 (3+2+2+3=10 Punkte)

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $((p \wedge q) \leftrightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$ ist eine Tautologie.

(b) Gilt $\{\alpha\} \models \beta$, dann ist $\alpha \wedge \neg\beta$ unerfüllbar.

(c) $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \rightarrow q \equiv (\neg p_1 \vee q) \wedge (\neg p_2 \vee q) \wedge \ldots \wedge (\neg p_n \vee q)$

(d) Wenn α unerfüllbar ist und wenn β unerfüllbar ist, dann ist $\alpha \rightarrow \beta$ eine Tautologie.

Aufgabe 2 (3+7=10 Punkte)

(a) Überführen Sie die Formel

$$((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (s \vee \neg t)$$

in konjunktive Normalform und geben Sie die Klauselmenge an.

(b) Gegeben sind die folgenden Klauseln:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{p, \neg q, t\} \\ K_2 &= \{\neg q, r, \neg t\} \\ K_3 &= \{\neg p, r\} \\ K_4 &= \{q, s\} \\ K_5 &= \{q, \neg s\} \end{aligned}$$

Zeige Sie mithilfe der Resolution: $\{K_1, \ldots, K_5\} \models r$

Aufgabe 3 (2+2+2+2+2=10 Punkte)

Gegeben sei eine quadratische Matrix $M \subseteq \{0,1\}^{n\times n}$. M hat als Komponenten also nur 0 oder 1. Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Prädikat $N(i,j)$ sei genau dann wahr, wenn in Zeile i und Spalte j von M eine 0 steht, das Prädikat $E(i,j)$ sei genau dann wahr, wenn in Zeile i und Spalte j eine 1 steht. Für das Universum U gilt also $U = \{1,\ldots,n\}$.

Formulieren Sie nun in Prädikatenlogik die folgenden Sachverhalte.

(a) M hat eine 1.

(b) Jede Zeile von M enthält mindestens eine 0.

(c) Es gibt eine Spalte, die nur aus 0'en besteht.

(d) Die beiden ersten Zeilen sind gleich.

(e) M ist symmetrisch.

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (k+2)(k-1) = \frac{1}{3} n(n-1)(n+4)$$

(b) Die formale Sprache $\mathcal{S}$ sei über dem Alphabet $\{\bigcirc, \square\}$ wie folgt definiert:

(i) $\bigcirc \in \mathcal{S}$ und $\bigcirc\square\bigcirc \in \mathcal{S}$

(ii) Gilt $r, s \in \mathcal{S}$, dann gilt auch $r\square \bigcirc \square s \in \mathcal{S}$.

(iii) $\mathcal{S}$ enthält genau die Elemente, die durch die Regeln (i) und (ii) gebildet werden können.

Zeigen Sie: Jedes $s \in \mathcal{S}$ enthält mehr $\bigcirc$ als $\square$.

Aufgabe 5 (4+6=10 Punkte)

(a) Es sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3\}$. Geben Sie die folgenden Relationen explizit an:

(i) $(A \cup B) \times (A \cap B)$

(ii) $(A \setminus A) \times A$

(iii) $\mathcal{P}(A) \times (B \setminus A)$

(b) Zeigen Sie: Die Relation $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch

$$R = \{(x, y) | \exists k \in \mathbb{N}_0 : y = 2^k x\}$$

ist eine partielle Ordnung.

Aufgabe 6 (4+2+4=10 Punkte)

(a) Sei $f : M \to N$, $A, B \subseteq N$. Zeigen Sie:

$$f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

(b) Gilt in (a) auch

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)?$$

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - 1 & \text{falls } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.