Funktionsbegriff

- Zur Erinnerung: Funktion definiert in Definition 3.14
- zweistellige, totale, rechtseindeutige Relation
- Schreibweise:

$$f : A \to B$$

bzw.

$$f : A \to B, x \mapsto f(x)$$

und $y = f(x)$ statt $(x, y) \in f$.

- A ist der Definitionsbereich, B der Wertebereich von f.
- Begriff der Abbildung: Kombination aus Funktionsvorschrift f und den Mengen A und B.
- Wir gebrauchen die beiden Begriffe synonym.

Bild und Urbild

Definition 5.43

Sei $f : A \to B$ eine Funktion, $x \in A, y \in B, C \subseteq A$ und $D \subseteq B$.

Dann heißt:

(i) $y = f(x)$ das Bild des Arguments x unter f.

(ii) $f(C) = \{f(x) | x \in C\}$ das Bild von C unter f.

(iii) $f^{-1}(y) = \{x \in A | f(x) = y\}$ die Urbildmenge von y unter f.

(iv) $f^{-1}(D) = \{x \in A | f(x) \in D\}$ die Urbildmenge von D unter f.

Funktionseigenschaften

Folgerung 5.44

Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Dann gilt:

(a) *f ist injektiv genau dann, wenn $|f^{-1}(y)| \leq 1$ für alle $y \in B$ ist.*
Jedes Element des Wertebereichs hat höchstens ein Urbild.

(b) *f ist surjektiv genau dann, wenn $|f^{-1}(y)| \geq 1$ für alle $y \in B$ ist.*
Jedes Element des Wertebereichs hat mindestens ein Urbild.

(c) *f ist bijektiv genau dann, wenn $|f^{-1}(y)| = 1$ für alle $y \in B$ ist.*
Jedes Element des Wertebereichs hat genau ein Urbild.

(d) *f ist genau dann bijektiv, wenn f^{-1} bijektiv ist.*

Beispiel 5.45

(i) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 3x + 5$$

Ist f surjektiv, injektiv, bijektiv? Ist f^{-1} eine Funktion?

(ii) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Ist f surjektiv, injektiv, bijektiv? Ist f^{-1} eine Funktion?

(iii) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Ist f surjektiv, injektiv, bijektiv? Ist f^{-1} eine Funktion?

Komposition von Funktionen

- Wie Relationen können auch Funktionen komponiert werden.
- Für $f : A \to B$ und $g : B \to C$ schreiben wir

$$g \circ f : A \to C$$

- Achtung: andere Reihenfolge als bei Relationen
- Begründung: Auswertung von innen nach außen:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Beispiel 5.46

Sei
$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch $f(x) = 2x + 1$ und
$g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch $g(x) = x^2$.

Dann gilt:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

und

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$$

Zusammenfassung

- Potenzmenge als Menge aller Teilmengen
- Verknüpfungseigenschaften der Mengenoperationen ähnlich zur Aussagenlogik
- wichtige Relationseigenschaften: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität
- spezielle Relationen: Partielle Ordnung und Äquivalenzrelation
- Komposition von Relationen und die transitive Hülle
- Funktion und Funktionseigenschaften: Surjektivität, Injektivität, Bijektivität, Bild und Urbild, Umkehrfunktion
- Komposition von Funktionen