Schreibweisen für Relationsbeziehungen

Wir wollen die Tatsache, dass ein Paar $(x, y) \in A \times B$ zu einer Relation $R \subseteq A \times B$ gehört („in der Beziehung R stehen“), ausdrücken, indem wir die

- normale Elementschreibweise $(x, y) \in R$,
- die Präfixschreibweise $R(x, y)$ oder
- die Infixschreibweise xRy verwenden.

Spezielle Relationen

Definition 5.15

(i) Ist $R = \emptyset$, dann heißt R Nullrelation.

(ii) Ist $R = A \times B$, dann heißt R vollständig.

(iii) Die Relation

$$R = \{(x,x) | x \in A\} \subseteq A \times A$$

heißt identische Relation über A. Sie wird in der Regel mit id_A bezeichnet.

Relationseigenschaften

Definition 5.16

Sei $R \subseteq A \times A$ eine zweistellige homogene Relation über der Grundmenge A. Dann heißt R

(i) reflexiv genau dann, wenn xRx für alle $x \in A$,

(ii) irreflexiv genau dann, wenn $(x, x) \notin R$ für alle $x \in A$,

(iii) symmetrisch genau dann, wenn gilt: $xRy \Rightarrow yRx$,

(iv) asymmetrisch genau dann, wenn gilt: $xRy \Rightarrow \neg yRx$,

(v) antisymmetrisch genau dann, wenn gilt: $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$,

(vi) transitiv genau dann, wenn gilt: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Beispiel 5.17

Wir definieren die Relation $\leq \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ durch

$$x \leq y \text{ genau dann, wenn } c \in \mathbb{N}_0 \text{ existiert, so dass } x + c = y.$$

Es gilt z. B. $3 \leq 5$, denn mit $c = 2$ gilt $3 + c = 5$.

- $\leq$ ist reflexiv, denn für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ gibt es $c = 0$ mit $x + c = x$.
- $\leq$ ist nicht symmetrisch, denn es gilt z. B. $3 \leq 5$, aber nicht $5 \leq 3$.
- $\leq$ ist antisymmetrisch: ✎
- Da die Relation reflexiv ist, ist sie nicht asymmetrisch.
- $\leq$ ist transitiv: ✎

Noch mehr Relationseigenschaften

Definition 5.18

Sei $R \subseteq A \times B$ eine zweistellige Relation. Dann heißt R:

(i) linkseindeutig oder injektiv genau dann, wenn gilt: Ist $x_1 R y_1, x_2 R y_2$ und $x_1 \neq x_2$, dann muss $y_1 \neq y_2$ gelten.

(ii) rechtseindeutig genau dann, wenn gilt: Ist $x_1 R y_1, x_2 R y_2$ und $y_1 \neq y_2$, dann muss $x_1 \neq x_2$ gelten.

(iii) linkstotal oder total genau dann, wenn gilt: Für alle $a \in A$ existiert ein $y \in B$ mit xRy.

(iv) rechtstotal oder surjektiv genau dann, wenn gilt: Für alle $y \in B$ existiert ein $x \in A$ mit xRy.

(v) bijektiv genau dann, wenn R total, injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 5.19

Wir untersuchen weitere Eigenschaften der Relation $\leq$ von Beispiel 5.17.

- $\leq$ ist nicht injektiv, denn es gilt z. B. $3 \leq 5$ und $4 \leq 5$. Damit ist die Relation auch nicht bijektiv.
- $\leq$ ist nicht rechtseindeutig und damit keine Funktion, denn es gilt z. B. $3 \leq 4$ und $3 \leq 5$.
- Da $\leq$ reflexiv ist, ist sie auch total und surjektiv.

Partielle Ordnung

Definition 5.20

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt partielle Ordnung über A genau dann, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Partielle Ordnungen werden auch einfach nur Ordnungen genannt.

Ist R eine partielle Ordnung über A, dann schreibt man dafür auch (A, R) und nennt A eine geordnete Menge.

Beispiel 5.21

(i) Die Relation $\leq$ aus Beispiel 5.17 ist eine partielle Ordnung.

(ii) Die Teilbarkeitsrelation $|$ bildet eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$.

(iii) Es sei M eine Menge. Dann bildet die Teilmengenrelation $\subseteq$ eine partielle Ordnung über $\mathcal{P}(M)$.

Begriffe im Kontext partieller Ordnungen

Definition 5.22

Sei (A, R) eine partielle Ordnung und $x, y \in A$.

(i) Gilt xRy oder yRx, dann heißen x und y vergleichbar, ansonsten unvergleichbar.

(ii) Sei $B \subseteq A, B \neq \emptyset$. $x \in B$ heißt minimales Element von B, falls xRy für alle $y \in B$ gilt. $x \in B$ heißt maximales Element von B, falls yRx für alle $y \in B$ gilt.

(iii) $K \subseteq A, K \neq \emptyset$ heißt Kette genau dann, wenn für alle $x, y \in K$ gilt, dass x und y vergleichbar sind.

(iv) (A, R) heißt totale Ordnung oder auch lineare Ordnung genau dann, wenn A eine Kette bildet.

(v) Eine totale Ordnung (A, R) ist eine Wohlordnung genau dann, wenn jede Teilmenge $K \subseteq A, K \neq \emptyset$ ein minimales Element besitzt.

Beispiel 5.23

(i) Die Teilbarkeitsrelation bildet keine totale Ordnung auf $\mathbb{N}$, denn es gibt Zahlen p, q, für die sowohl $p \nmid q$ als auch $q \nmid p$ gilt.

(ii) Die partielle Ordnung $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ ist ebenfalls nicht total, denn bspw. $\{a, b\}$ und $\{b, c\}$ sind unvergleichbar.

(iii) Die partielle Ordnung $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ enthält unter anderem die Kette $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, denn

$$\emptyset \subseteq \{a\} \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$$

(iv) $\{a, b, c\}$ ist ein maximales Element von $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ und $\emptyset$ ein minimales Element.

(v) Die Relation $\leq$ aus Beispiel 5.17 ist eine totale Ordnung und eine Wohlordnung.

Fortsetzung Beispiel.

(vi) Wenn wir die Ordnung $\leq$ aus Beispiel 5.17 auf die ganzen Zahlen erweitern, dann bildet $(\mathbb{Z}, \leq)$ zwar eine totale Ordnung, aber keine Wohlordnung.

Begründung: Bspw. hat die Teilmenge $\mathbb{G}$ der geraden Zahlen kein minimales Element in $\mathbb{Z}$.

(vii) Wir können für $\mathbb{Z}$ aber eine andere Ordnung definieren, die dann auch eine Wohlordnung ist. Wir definieren $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ durch

$$\phi(x) = \begin{cases} 2x & \text{falls } x \leq 0 \\ -(2x+1) & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und für $x, y \in \mathbb{Z}$ gelte

$$x \leq_\phi y :\Leftrightarrow \phi(x) \leq \phi(y).$$

Dann ist $(\mathbb{Z}, \leq_\phi)$ eine Wohlordnung.

$\leq$ als Prototyp einer totalen Ordnung

- Da die Relation $\leq$ auf allen Zahlenmengen eine totale Ordnung festlegt, gilt sie als Prototyp für totale Ordnungen.
- Deshalb benutzt man das Symbol $\leq$ auch ganz allgemein als Symbol für totale Ordnungen.
- Wird also $(A, \leq)$ für irgendeine Menge A notiert, soll dies bedeuten, dass eine total geordnete Menge A vorliegt.

Dichte Ordnungen

Definition 5.24

Sei $(A, \leq)$ eine totale Ordnung.

A heißt dicht bezüglich $\leq$ genau dann, wenn für alle $x, y \in A$ mit $x \neq y$ und $x \leq y$ ein $z \in A$ existiert mit $z \neq x, z \neq y$ und $x \leq z \leq y$.

- $\forall x \in A \forall y \in A : x < y \Rightarrow \exists z : x < z < y$
- Eine geordnete Menge ist also dicht, wenn zwischen zwei Elementen dieser Menge immer noch ein drittes liegt.

Beispiel 5.25

(i) $(\mathbb{N}_0, \leq)$ und $(\mathbb{Z}, \leq)$ sind nicht dicht.

Begründung: Zwischen zwei benachbarten natürlichen bzw. ganzen Zahlen x und $y = x + 1$ liegt keine weitere ganze bzw. natürliche Zahl.

(ii) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist dicht.

Begründung: Sei $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \leq b$ und $a \neq b$.

- $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$
- $a \neq \frac{a+b}{2}$ und $b \neq \frac{a+b}{2}$
- $a = \frac{a+a}{2} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{b+b}{2} = b$

Äquivalenzrelationen

Definition 5.26

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Äquivalenzrelation über A genau dann, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiel 5.27

Die Relation $\equiv_3 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei definiert durch

$$x \equiv_3 y \quad :\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z}$$

$\equiv_3$ ist eine Äquivalenzrelation.

Begründung: Tafel ✎

Äquivalenzklasse

Definition 5.28

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und $x \in A$. Dann heißt die Menge

$$[x]_R = \{y \in A | xRy\}$$

Äquivalenzklasse von R. x heißt Repräsentant der Äquivalenzklasse $[x]_R$. Die Anzahl der Äquivalenzklassen von R heißt Index von R.

Beispiel 5.29

$$\begin{array}{lclcl} [0]_{\equiv_3} & = & \{0, 3, -3, 6, -6, \ldots\} & = & \{x | x = 3y, y \in \mathbb{Z}\} \\ [1]_{\equiv_3} & = & \{1, -2, 4, -5, 7, -8, \ldots\} & = & \{x | x = 3y + 1, y \in \mathbb{Z}\} \\ [2]_{\equiv_3} & = & \{2, -1, 5, -4, 8, -7, \ldots\} & = & \{x | x = 3y + 2, y \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

Eigenschaften von Äquivalenzrelationen

Satz 5.30

Sei $R \subseteq A \times A$ mit $A \neq \emptyset$ eine Äquivalenzrelation. Dann gilt:

(i) *Für alle $x \in A$ ist $[x]_R \neq \emptyset$.*
Äquivalenzklassen sind niemals leer.

(ii) *Für alle $y \in [x]_R$ gilt $[x]_R = [y]_R$.*
Äquivalenzklassen sind unabhängig von ihrem Repräsentanten.

(iii) *Falls $(x, y) \notin R$ ist, dann ist $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.*
Die Äquivalenzklassen nicht in Beziehung stehender Repräsentanten sind disjunkt.

(iv) *Für $x, y \in A$ gilt entweder $[x]_R = [y]_R$ oder $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.*
Zwei Elemente der Grundmenge repräsentieren entweder dieselbe oder zwei disjunkte Äquivalenzklassen.

Fortsetzung Satz.

(v) $A = \bigcup_{x \in A} [x]_R$.

Die Äquivalenzklassen bilden eine Überdeckung von A.

Beweis.

(i) Folgt aus der Reflexivität.

(ii) Folgt aus der Symmetrie.

(iii) Folgt aus Symmetrie und Transitivität mit Widerspruchsbeweis.

(iv) Folgt unmittelbar aus (ii) und (iii).

(v) Folgt aus $x \in [x]_R$.

Genaueres: Tafel ✎

Partitionen für Äquivalenzrelationen

Folgerung 5.31

(i) *Jede Äquivalenzrelation $R \subseteq A \times A$ legt eine Partition von A fest.*

(ii) *Jede Partition von A definiert eine Äquivalenzrelation auf A.*

(iii) *Die identische Relation id_A legt die feinste Partition von A fest.*

(iv) *Die vollständige Relation $R = A \times A$ legt die gröbste Partition auf A fest.*

Umkehrrelationen

Definition 5.32

Für eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt die Relation $R^{-1} \subseteq B \times A$ definiert durch

$$yR^{-1}x \text{ genau dann, wenn } xRy$$

die Umkehrrelation zu R.

Folgerung 5.33

(i) $R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A | (x,y) \in R\}$

(ii) *$R \subseteq A \times B$ ist linkseindeutig genau dann, wenn R^{-1} rechtseindeutig ist.*

(iii) *$R \subseteq A \times B$ ist bijektiv genau dann, wenn R^{-1} bijektiv ist.*

(iv) *Ist $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation, dann gilt $R = R^{-1}$.*

Komposition von Relationen

Definition 5.34

Seien A, B, C Mengen sowie $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ Relationen.

Dann heißt die Relation $R \circ S \subseteq A \times C$ definiert durch

$$R \circ S = \{(x,z) | \exists y \in B : xRy \wedge ySz\}$$

die Komposition von R und S.

Beispiel 5.35

Die Relationen $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ seien definiert durch

$$R_1 = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{N} \wedge y = 2x\} = \{(1,2),(2,4),(3,6),\ldots\}$$
$$R_2 = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{N} \wedge y = 3x\} = \{(1,3),(2,6),(3,9),\ldots\}$$

Die Komposition von R_1 und R_2 ergibt

$$\begin{aligned} R_1 \circ R_2 &= \{(1,6),(2,12),(3,18),\ldots\} \\ &= \{(x,y) | x,y \in \mathbb{N} \wedge y = 6x\} \end{aligned}$$

Eigenschaften der Komposition (1)

Verknüpfung mit der identischen Relation, total, surjektiv.

Satz 5.36

Seien A, B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Dann gilt:

(i) $\mathrm{id}_A \circ R = R$,

(ii) $R \circ \mathrm{id}_B = R$,

(iii) *ist R total, dann ist $\mathrm{id}_A \subseteq R \circ R^{-1}$, und*

(iv) *ist R surjektiv, dann ist $\mathrm{id}_B \subseteq R^{-1} \circ R$.*

Eigenschaften der Komposition (2)

Komposition und Umkehrrelation, Assoziativgesetz, Distributivgesetze für Komposition, Vereinigung und Durchschnitt.

Satz 5.37

Seien $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, T \subseteq C \times D$ Relationen. Dann gilt:

(i) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

(ii) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

(iii) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$
$R \circ (S \cap T) = (R \circ S) \cap (R \circ T)$

Eigenschaften der Komposition (3)

Komposition und Teilmengeneigenschaft.

Satz 5.38

Es seien $R_1, R_2 \subseteq A \times B$ und $S_1, S_2 \subseteq B \times C$ Relationen. Dann gilt:

$$R_1 \subseteq R_2 \wedge S_1 \subseteq S_2 \quad \Longrightarrow \quad R_1 \circ S_1 \subseteq R_2 \circ S_2$$

Relationseigenschaften anders formuliert

Satz 5.39

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation. Dann gilt:

(i) *R ist reflexiv genau dann, wenn $\mathrm{id}_A \subseteq R$,*

(ii) *R ist irreflexiv genau dann, wenn $\mathrm{id}_A \cap R = \emptyset$,*

(iii) *R ist symmetrisch genau dann, wenn $R = R^{-1}$,*

(iv) *R ist asymmetrisch genau dann, wenn $R \cap R^{-1} = \emptyset$,*

(v) *R ist antisymmetrisch genau dann, wenn $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$,*

(vi) *R ist transitiv genau dann, wenn $R \circ R \subseteq R$,*

(vii) *R ist injektiv genau dann, wenn $R \circ R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$,*

(viii) *R ist rechtseindeutig genau dann, wenn $R^{-1} \circ R \subseteq \mathrm{id}_A$,*

(ix) *R ist total genau dann, wenn $\mathrm{id}_A \subseteq R \circ R^{-1}$,*

(x) *R ist surjektiv genau dann, wenn $\mathrm{id}_A \subseteq R^{-1} \circ R$,*

(xi) *R ist bijektiv genau dann, wenn $R \circ R^{-1} \subseteq R^{-1} \circ R$.*

Reflexiv-transitive Hülle

Definition 5.40

Sei $R \subseteq A \times A$ eine zweistellige Relation über A. Für R definieren wir:

(i) $R^0 = \mathrm{id}_A$

(ii) $R^n = R^{n-1} \circ R$ für $n \geq 1$

(iii) $R^+ = R^1 \cup R^2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

(iv) $R^* = R^0 \cup R^+ = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

R^+ heißt die transitive Hülle von R und R^* die reflexiv-transitive Hülle von R.

Beispiel 5.41

- Es sei M die Menge der Menschen, die bisher auf der Erde gelebt haben.
- Die Relation $K \subseteq M \times M$ sei definiert durch:

$$x\,K\,y :\Leftrightarrow x \text{ ist ein Kind von } y$$

- Dann enthält K^2 alle Enkel-Beziehungen, K^3 alle Urenkel-Beziehungen usw.
- K^+ enthält alle Nachkommen-Beziehungen über alle Generationen hinweg.

Beispiel 5.42

Sei $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch:

$$x\, R\, y :\Leftrightarrow y = 2x$$

Damit gilt:

(i) $R^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} = \{(1,1),(2,2),(3,3),\ldots\} = \{(x,x) | x \in \mathbb{N}\}$

(ii) $R^1 = R^0 \circ R = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \circ R = \{(1,2),(2,4),(3,6),\ldots\} = \{(x,y) | y = 2x\}$

(iii) Fortgesetzte Komposition von R:

$$\begin{array}{ccccccc}
R^2 & = & R \circ R & = & \{(1,4),(2,8),(3,12),\ldots\} & = & \{(x,y)|y = 4x\} \\
R^3 & = & R^2 \circ R & = & \{(1,8),(2,16),(3,24),\ldots\} & = & \{(x,y)|y = 8x\} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
R^n & = & R^{n-1} \circ R & = & \{(1,2^n \cdot 1),(2,2^n \cdot 2),\ldots\} & = & \{(x,y)|y = 2^n x\}
\end{array}$$

(iv) $R^* = \{(x,y) | y = 2^n x, n \in \mathbb{N}_0\}$

(v) $R^+ = \{(x,y) | y = 2^n x, n \in \mathbb{N}\}$