Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Mathematische Grundlagen
Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik
Wintersemester 2016/17
12. Januar 2017

Aufgabenblatt 13

Hinweise:

- Keine Abgabe und keine Bewertung!
- Besprechung der Aufgaben in den Übungen von KW 3.

Aufgabe 1 (Binomialkoeffizienten)

Zeigen Sie:

(a)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(b)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Hinweise: Hier benötigen Sie nur Termumformungen, keine vollständige Induktion. Bei (b) beweisen Sie die Gleichung am besten von rechts nach links, d. h. Sie schreiben die Definition der rechten Seite hin und formen dann so lange um, bis Sie die linke Seite haben.

Aufgabe 2 (Binomische Formel)

(a) Schreiben Sie $(1+x)^6$ aus (als Summe ohne Klammern).

(b) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Hinweise: Der Beweis ist eine reine Technikübung. Nutzen Sie vollständige Induktion. Beim Induktionsschritt brauchen Sie die Gleichung aus Aufgabe 1 (b). Auch müssen Sie einmal eine Indexverschiebung durchführen.

(c) Zeigen Sie: Für alle $q \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Hinweis: Geht mit aber auch ohne vollständige Induktion.

(d) Berechnen Sie: $13^0 + 13^1 + 13^2 + \cdots + 13^7$.

Aufgabe 3 (Schubfachprinzip)

(a) Zeigen Sie: Unter je fünf Punkten in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 gibt es stets zwei, deren Abstand höchstens $1/2$ ist.

(b) Unter je 17 Punkten in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 gibt es stets zwei, deren Abstand höchstens d ist.

Bestimmen Sie einen geeigneten Wert für d und zeigen Sie mit diesem Wert die Gültigkeit der Aussage.

(c) Unter je s Punkten in einem Würfel der Seitenlänge 3 gibt es stets zwei, die einen Abstand $\leq \sqrt{3}$ haben.

Bestimmen Sie einen geeigneten Wert für s.

Aufgabe 4 (Schubfachprinzip)

Gegeben seien n natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 2^n - 2$. Zeigen Sie, dass es dann zwei nichtleere Indexmengen $I_1, I_2 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und $\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i$ gibt.