Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Mathematische Grundlagen
Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik
Wintersemester 2016/17
22. Dezember 2016

Aufgabenblatt 12

Hinweise:

- Abgabe der handschriftlichen Lösungen bis spätestens **Donnerstag, 12. Januar 2017, 10:30 Uhr** (vor der Vorlesung) in **Postfach 110** gegenüber dem Fachbereichssekretariat.
- Geben Sie deutlich lesbar Ihre **Matrikelnummer** an (Namen sind optional).
- Heften Sie Ihre Blätter zusammen!

Aufgabe 1 (Eigenschaften von Funktionen)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen surjektiv, injektiv bzw. bijektiv sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_\lambda(x) = \lambda x$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Unterscheiden Sie $\lambda = 0$ und $\lambda \neq 0$.

(b) $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $g(M) = |M|$ für alle endlichen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ und $g(M) = \infty$ für alle unendlichen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$.

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = xy$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$i(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

(je 2 Punkte)

Aufgabe 2 (Komposition von Relationen)

(a) Seien A, B, C Mengen und $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, T \subseteq B \times C$ Relationen. Zeigen Sie:

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

(b) Seien A, B Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Zeigen Sie:

$$R \text{ ist injektiv } \Leftrightarrow R \circ R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$$

(je 2 Punkte)

Aufgabe 3 (Bild und Urbild)

Es sei $f : M \to N$, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B_1, B_2 \subseteq N$.

(a) Zeigen Sie:
$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

(b) Gilt auch $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$? Beweisen oder widerlegen Sie diese Aussage.

(c) Zeigen Sie:
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

(je 2 Punkte)

Aufgabe 4 (Reflexiv-transitive Hülle, Zusatzaufgabe)

Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen und $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $xRy :\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{P} : y = px$.

Zeigen Sie:
$$R^* = \{\,(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$$

Hinweise:

- Für den Beweis von $R^* \subseteq \{\,(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$ zeigen Sie:
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : R^n \subseteq \{\,(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$$
Den Nachweis dieser Aussage führen z. B. mittels vollständiger Induktion.
- Für $R^* \supseteq \{\,(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$ hilft an geeigneter Stelle eine Primfaktorzerlegung.

(4 Zusatzpunkte)

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $G = \{1, \ldots, 2^n\} \times \{1, \ldots, 2^n\}$ ein $2^n \times 2^n$-Gitter.

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Für ein beliebiges $z \in G$ kann die Menge $G \setminus \{z\}$ als disjunkte Vereinigung von Mengen der Form $\{(x, y), (x, y+1), (x+1, y)\}$, $\{(x, y), (x, y-1), (x+1, y)\}$, $\{(x, y), (x, y+1), (x-1, y)\}$ und $\{(x, y), (x, y-1), (x-1, y)\}$ dargestellt werden.

Hinweis: Skizzieren Sie das Problem graphisch und verwenden Sie vollständige Induktion.

(6 Zusatzpunkte)