



Kombinatorische Optimierung

Aufgabenblatt 3

Abgabe zu **zweit** am 8. Mai 2024 vor der Vorlesung.

Sollpunktzahl: 14 Punkte

Aufgabe 1 (Klee-Minty-Polytop)

3 Punkte

Ermitteln Sie alle Ecken des 3-dimensionalen Klee-Minty-Polytops.

Aufgabe 2 (Erkennung eines bipartiten Graphen)

8 Punkte

Schreiben Sie eine Java-Methode, die erkennt, ob ein Graph $G = (V, E)$ bipartit ist.

Aufgabe 3 (Weighted/Bipartite Vertex Cover)

2+2+2+2+2+2=12 Punkte

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ und eine Kostenfunktion $c : V \rightarrow \mathbb{N}$. Eine *Knotenüberdeckung* von G ist eine Knotenmenge $U \subseteq V$, so dass für jede Kante $e = \{v, w\} \in E$ mindestens einer der Knoten v, w in U enthalten ist. Weiterhin ist

$$c(U) = \sum_{v \in U} c(v)$$

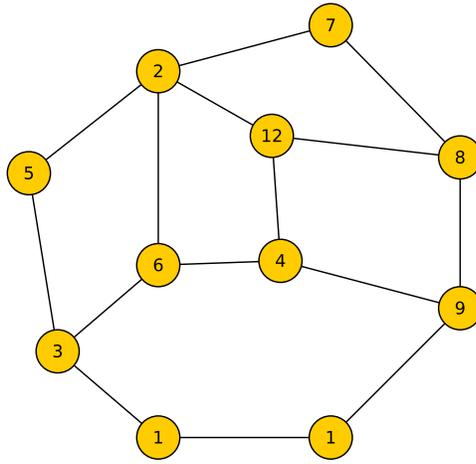
das Gewicht von U .

- Formulieren Sie das Problem, eine Knotenüberdeckung mit minimalem Gewicht zu bestimmen, als ganzzahliges LP.
- Gegeben sei zusätzlich eine Konstante $C \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das folgende Entscheidungsproblem:

Existiert für einen bipartiten Graphen $G = (V, E)$ eine Knotenüberdeckung U mit einem Gewicht $c(U) \leq C$?

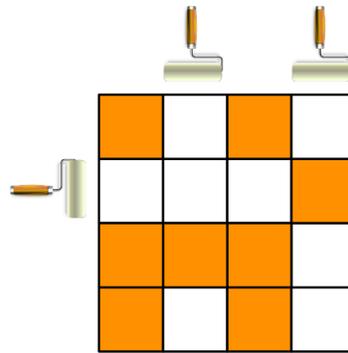
Ist dieses Entscheidungsproblem in \mathcal{P} ? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Berechnen Sie mit dem GLPK eine Knotenüberdeckung mit minimalem Gewicht für den folgenden Graphen (die Nummern sind die Knotengewichte):



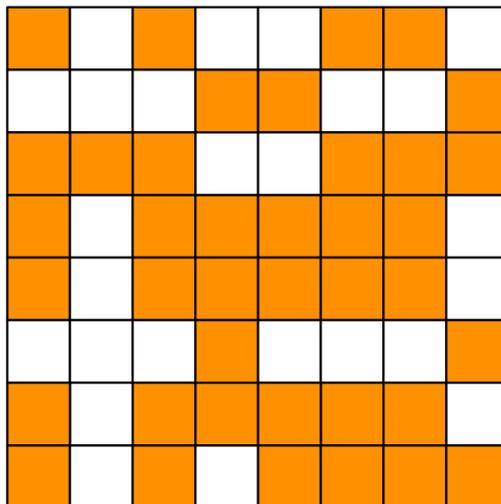
- (d) Gegeben sei ein quadratisches Gitter mit weißen und orangen Feldern. Wir möchten eine möglichst kleine Menge U (also $\min |U|$) von Zeilen und Spalten finden, so dass das Gitter vollständig orange wird, wenn wir alle Zeilen und Spalten aus U orange färben.

Die folgende Graphik zeigt eine Probleminstanz mit einer optimalen Lösung ($|U| = 3$). Wenn wir die zweite und vierte Spalte sowie die zweite Zeile färben, ist das Gitter komplett orange.



Zeigen Sie, dass sich dieses Problem als Knotenüberdeckungsproblem in einem bipartiten Graphen formulieren lässt.

- (e) Berechnen Sie mit dem GLPK eine optimale Lösung für die folgende Probleminstanz:



- (f) Auf der Homepage der Vorlesung finden Sie die LP-Modelle `vc1.lp` und `vc2.lp` für zwei Instanzen des Knotenüberdeckungsproblems. Beide Graphen haben jeweils 200 Knoten und 1000 Kanten und beide Graphen sind nicht bipartit.

Sowohl das GLPK als auch Gurobi können in weniger als einer Zehntelsekunde für `vc1.lp` eine optimale Lösung ermitteln (Gurobi benötigt dafür nur 236 Simplex-Iterationen). Demgegenüber braucht Gurobi für `vc2.lp` fast eine Minute zur Bestimmung der optimalen Lösung und führt dabei 9.883.905 Simplex-Iterationen aus. Das GLPK ist sogar nicht in der Lage, für dieses Problem in akzeptabler Zeit eine optimale Lösung zu bestimmen.

Wie erklären Sie sich diese gravierenden Unterschiede trotz gleicher Problemgröße?