Fachbereich Informatik
Sommersemester 2024
Prof. Dr. Peter Becker

Kombinatorische Optimierung

Aufgabenblatt 2

Abgabe zu **zweit** am 24. April 2024 vor der Vorlesung.

Sollpunktzahl: 10 Punkte

Aufgabe 1 (Ganzzahlige Ecken) 2+2=4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht total unimodular ist, dass das Polyeder $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ aber trotzdem für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^3$ nur ganzzahlige Ecken hat.

(b) Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Das Polyeder $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 | \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ hat für alle $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^5$ nur ganzzahlige Ecken.

Aufgabe 2 (Bipartite Graphen) 3+3=6 Punkte

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit* genau dann, wenn sich die Knotenmenge V in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 aufteilen lässt (also $V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), so dass zwischen den Knoten innerhalb der Teilmengen keine Kanten verlaufen. Für jede Kante $e = \{v, w\} \in E$ gilt also entweder $v \in V_1 \wedge w \in V_2$ oder $v \in V_2 \wedge w \in V_1$.

(a) Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie:

$$G \text{ ist bipartit} \iff G \text{ hat keinen Kreis ungerader Länge}$$

(b) Beweisen Sie Satz 1.28: Wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ die Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen ist, dann ist $\mathbf{A}$ total unimodular.

Hinweis: Schauen Sie sich die Beweise von Lemma 1.26 und Satz 1.27 an und überlegen Sie sich, welcher Teil dieser Beweise sich nicht auf (ungerichtete) bipartite Graphen übertragen lässt. Es genügt, für diesen Teil einen alternativen Beweis zu finden. Hierbei ist (a) hilfreich.

Aufgabe 3 (Kantendisjunkte Wege) 2+2+2+2=8 Punkte

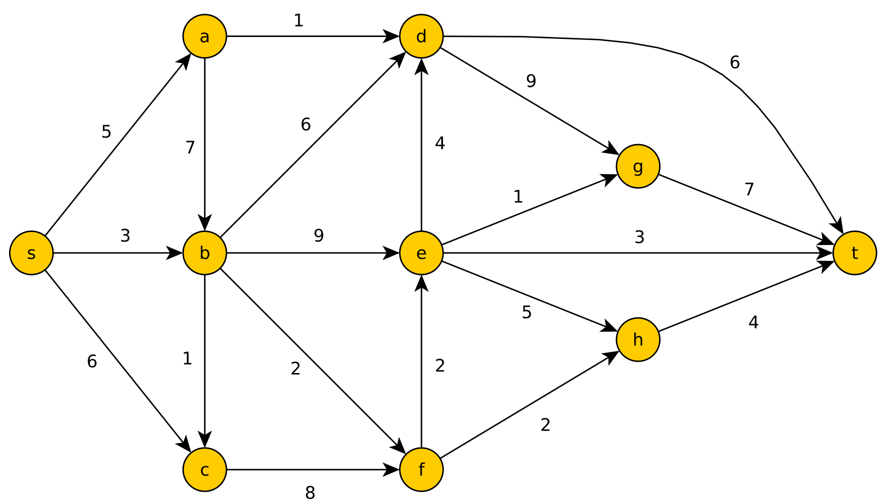
Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, ein Startknoten $s \in V$, ein Zielknoten $t \in V$ mit $s \neq t$ und eine Kosten- bzw. Längenfunktion $c : E \to \mathbb{R}$ auf den gerichteten Kanten.

Wir betrachten nun eine Verallgemeinerung des Problems, einen kürzesten Weg von s nach t zu finden. Statt genau einem Weg suchen wir k Wege von s nach t, die

- in der Summe möglichst kurz sind und
- deren Kanten alle paarweise verschieden sind. Jede Kanten von G tritt also in höchstens einem der Wege auf, die Wege sind *kantendisjunkt*.

Der Parameter k ist dabei für ein konkretes Problem fest, z. B. $k = 2$, und stellt somit keine Entscheidungsvariable dar. Für $k = 1$ erhalten wir das normale kürzeste Wegeproblem.

(a) Stellen Sie für den folgenden Graphen und $k = 2$ ein entsprechendes LP auf und lösen Sie dieses mit dem GLPK.



(b) Ist die Koeffizientenmatrix des Problems total unimodular? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Wenn k zu groß ist, wird es keine zulässige Lösung geben.

Wie kann man allgemein das größte k bestimmen, für das eine zulässige Lösung existiert?

Geben Sie für den Graphen aus (a) ein LP an, mit dem das größte k bestimmt werden kann und berechnen Sie mit dem GLPK diesen Wert.

(d) Wege, die kantendisjunkt sind, können neben s und t weitere Knoten gemeinsam haben. So wären bspw. die Wege (s, a, b, d, t) und (s, b, e, t) kantendisjunkt aber nicht knotendisjunkt, da beide den Knoten b enthalten.

Angenommen, wir suchen nun Wege, die knotendisjunkt sind, die also mit Ausnahme von s und t keine gemeinsamen Knoten haben.

Zeigen Sie: Ein Problem für knotendisjunkte Wege kann in ein äquivalentes Problem für kantendisjunkte Wege überführt werden.