Statistik und Graphentheorie

Wintersemester 2018/19

26. März 2019

Teil Graphentheorie

Name:

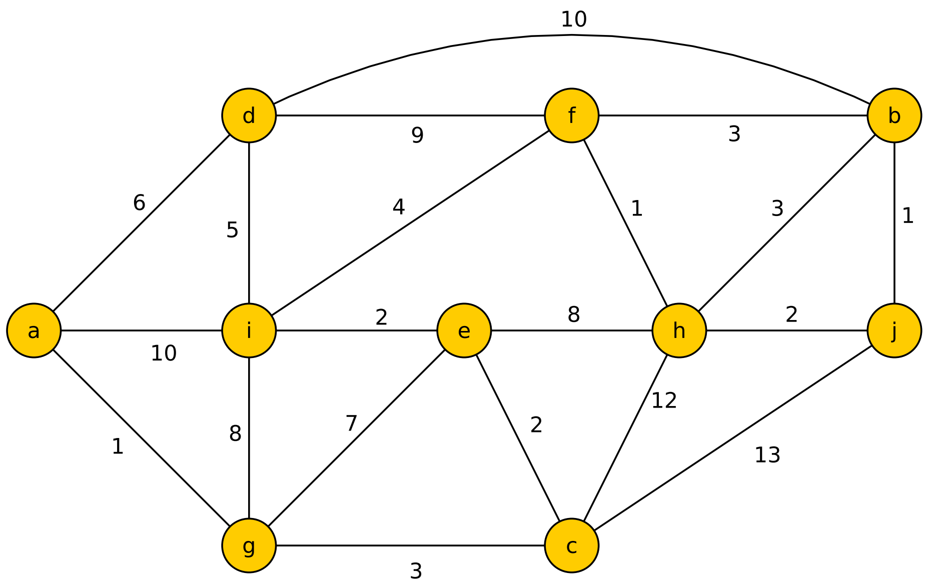
Matrikelnummer:

1 (12)	2 (12)	3 (12)	4 (12)	5 (12)	$\sum$ (60)

Name: **Matrikel:**

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei das folgende Netzwerk:



(a) Berechnen Sie schrittweise die Abstände von a zu allen anderen Knoten.

(b) Geben Sie einen kürzesten Weg von a nach j an.

Lösung:

(a)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	u	$d(u)$	$p(u)$
1.	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	a	0	–
2.		∞	∞	6	∞	∞	1	∞	10	∞	g	1	a
3.		∞	4	6	8	∞		∞	9	∞	c	4	g
4.		∞		6	6	∞		16	9	17	d	6	a
5.		16			6	15		16	9	17	e	6	c
6.		16				15		14	8	17	i	8	e
7.		16				12		14		17	f	12	i
8.		15						13		17	h	13	f
9.		15								15	b	15	f
10.										15	j	15	h

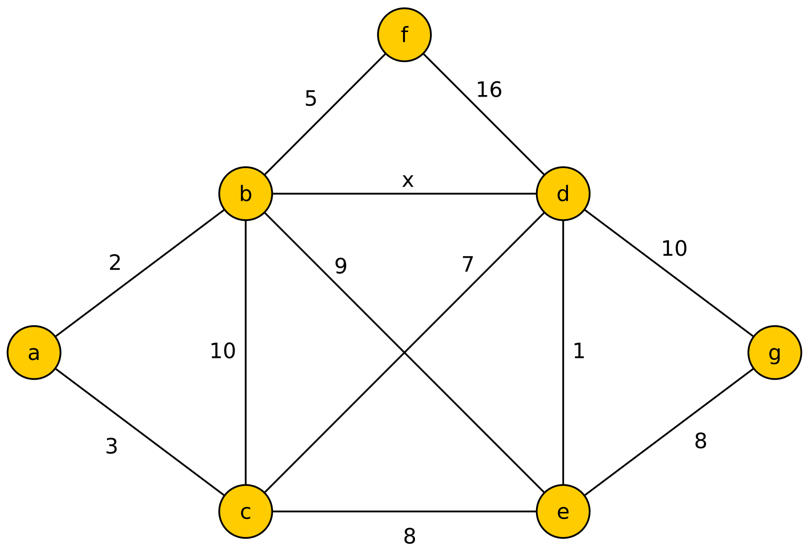
(b) kürzester Weg von a nach j:

$$a - g - c - e - i - f - h - j$$

Name: **Matrikel:**

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sieben Orte sollen durch ein Pipelinesystem miteinander verbunden werden. Der folgende Graph gibt die möglichen Verbindungen zwischen den Orten mit den zugehörigen Kosten an. Beachten Sie, dass die Kosten für eine Verbindung zwischen b und d den Wert x haben.



(a) Bestimmen Sie ein alle Orte verbindendes Pipelinesystem mit minimalen Gesamtkosten für $x = 6$.

(b) Für welche Werte von $x \geq 6, x \in \mathbb{N}$ ist das Pipelinesystem eindeutig bestimmt, für welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

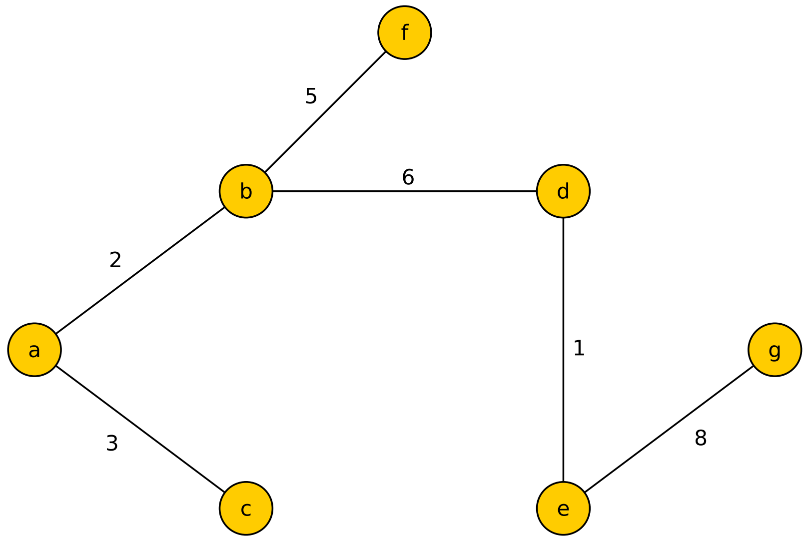
Lösung:

(a) Wir berechnen ein Minimalgerüst mit dem Algorithmus von Kurskal.

ZHKs	Kante	Länge	Selektion
$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\}$	$\{d,e\}$	1	ja
$\{a\},\{b\},\{c\},\{d,e\},\{f\},\{g\}$	$\{a,b\}$	2	ja
$\{a,b\},\{c\},\{d,e\},\{f\},\{g\}$	$\{a,c\}$	3	ja
$\{a,b,c\},\{d,e\},\{f\},\{g\}$	$\{b,f\}$	5	ja
$\{a,b,c,f\},\{d,e\},\{g\}$	$\{b,d\}$	6	ja
$\{a,b,c,d,e,f\},\{g\}$	$\{c,d\}$	7	nein
$\{a,b,c,d,e,f\},\{g\}$	$\{c,e\}$	8	nein
$\{a,b,c,d,e,f\},\{g\}$	$\{e,g\}$	8	ja
$\{a,b,c,d,e,f,g\}$	*STOP*		

Minimalgerüst:

Name: **Matrikel:**



(b) Für $x = 6$ ist die Wahl der Kanten eindeutig, siehe (a).

Für $x = 7$ könnten wir die Kante $\{b, d\}$ durch $\{c, d\}$ ersetzen. Das Minimalgerüst ist also nicht eindeutig.

Für $x = 8$ müssen wir $\{c, d\}$ selektieren. Die Kante $\{b, d\}$ darf dann nicht mehr selektiert werden. Dies gilt dann auch für $x > 8$.

Fazit: Das Pilpelinesystem ist für $x \neq 7$ eindeutig bestimmt, für $x = 7$ nicht.

Name: **Matrikel:**

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition des Begriffs *Baum* an.

(b) Welche der folgenden Aussagen treffen auf einen Baum $G = (V, E)$ zu, welche nicht (ohne Begründung)?

- Zwischen je zwei Knoten von G gibt es einen Weg.
- Es gibt immer einen Knoten $v \in V$, der kein Blatt ist.
- $|V| = |E| - 1$

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

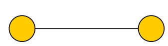
(i) $G = (V, E)$ ist ein Baum.

(ii) G ist kreisfrei, aber für je zwei nicht adjazente Knoten v und w von G enthält $G' = (V, E \cup \{\{v, w\}\})$ genau einen Kreis.

Lösung:

(a) $G = (V, E)$ ist ein Baum genau dann, wenn G kreisfrei und zusammenhängend ist.

(b)
- Zwischen je zwei Knoten von G gibt es einen Weg.
  Wahr. Folgt, weil G zusammenhängend ist.
- Es gibt immer einen Knoten $v \in V$, der kein Blatt ist.

  Falsch. Gegenbeispiel: 
- $|V| = |E| - 1$
  Falsch: Richtig wäre $|E| = |V| - 1$.

(c) (i) $\Rightarrow$ (ii): Wenn $G = (V, E)$ ein Baum ist, dann ist G nach Definition kreisfrei.

Seien $v, w \in V$ zwei nicht adjazente Knoten. Da G nach Definition zusammenhängend ist, existiert ein Weg von v nach w. Damit entsteht durch die Hinzunahme der Kante $\{v, w\}$ ein (einzelner) Kreis.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach Voraussetzung ist G kreisfrei, wir müssen also nur noch zeigen, dass G zusammenhängend ist.

Seien $v, w \in V$ zwei beliebige Knoten.

- Wenn v und w in G adjazent sind, dann bildet die Kante zwischen v und w einen Weg von v nach w.
- Seien also v und w nicht adjazent. Nach Voraussetzung gibt es dann in dem Graphen $G' = (V, E \cup \{\{v, w\}\})$ einen Kreis, d. h. durch die Hinzunahme der Kante $\{v, w\}$ zu G ist ein Kreis entstanden. Damit muss es in G einen Weg von v nach w geben.

Also ist G zusammenhängend.

Name: **Matrikel:**

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$a_n = 6a_{n-1} + 7a_{n-2} \text{ mit } a_1 = 1 \text{ und } a_2 = 1.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 7.$$

Als Nullstellen von $P(\lambda)$ erhalten wir

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm \sqrt{16} = 3 \pm 4 = 7 \text{ bzw. } -1.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$a_n = \alpha 7^n + \beta(-1)^n.$$

Wir setzen die Anfangsbedingungen ein, um α und β zu bestimmen. Beachten Sie, dass wir hier $n = 1$ und $n = 2$ einsetzen müssen, weil a_1 und a_2 gegeben sind.

$$\begin{array}{lrcrcl} n=1: & 7\alpha & - & \beta & = & 1 \\ n=2: & 49\alpha & + & \beta & = & 1 \end{array}$$

Addition der Gleichungen ergibt

$$56\alpha = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}.$$

Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$\beta = -\frac{21}{28}.$$

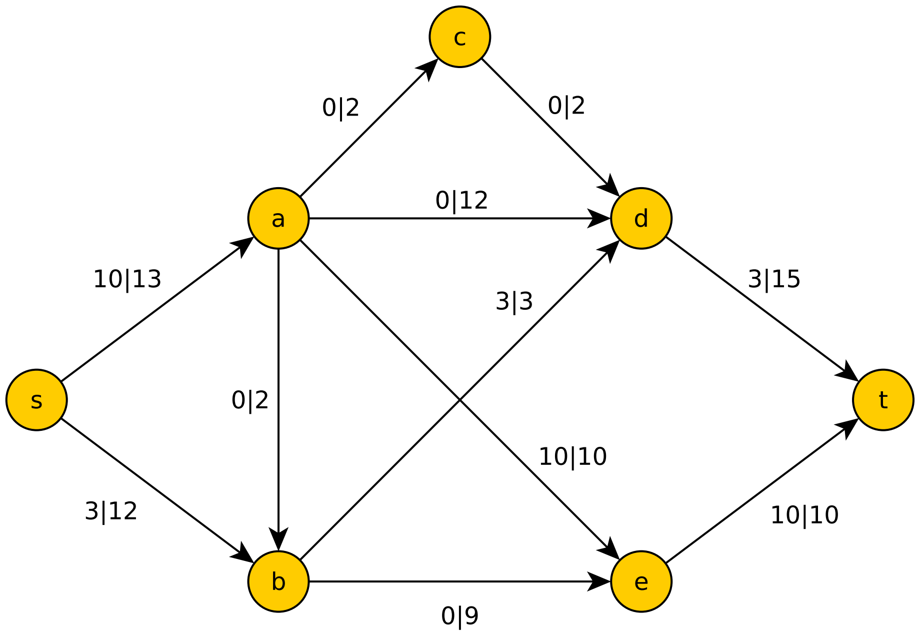
Also lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$a_n = \frac{1}{28} \cdot 7^n - \frac{21}{28} \cdot (-1)^n.$$

Name: **Matrikel:**

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Gegeben ist das folgende Flussnetzwerk mit Kapazitäten und einem Fluss f.



(a) Geben Sie den aktuellen Flusswert $\Phi(f)$ an.

(b) Berechnen Sie einen Maximalfluss. Geben Sie dabei für jeden Schritt einen zunehmenden Weg und den Flusswert $\Phi(f)$ an.

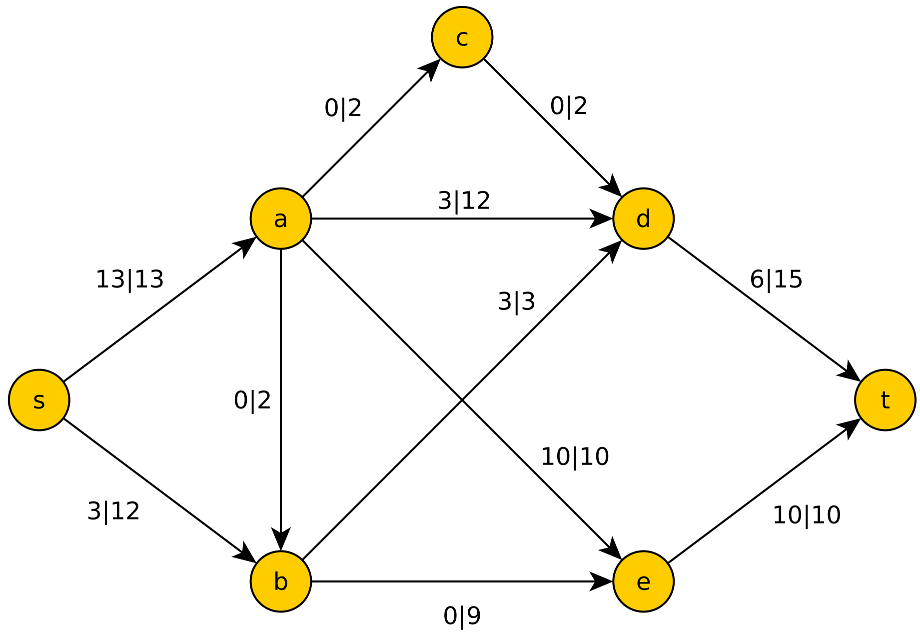
(c) Begründen Sie, dass der in (b) berechnete Fluss ein Maximalfluss ist.

Lösung:

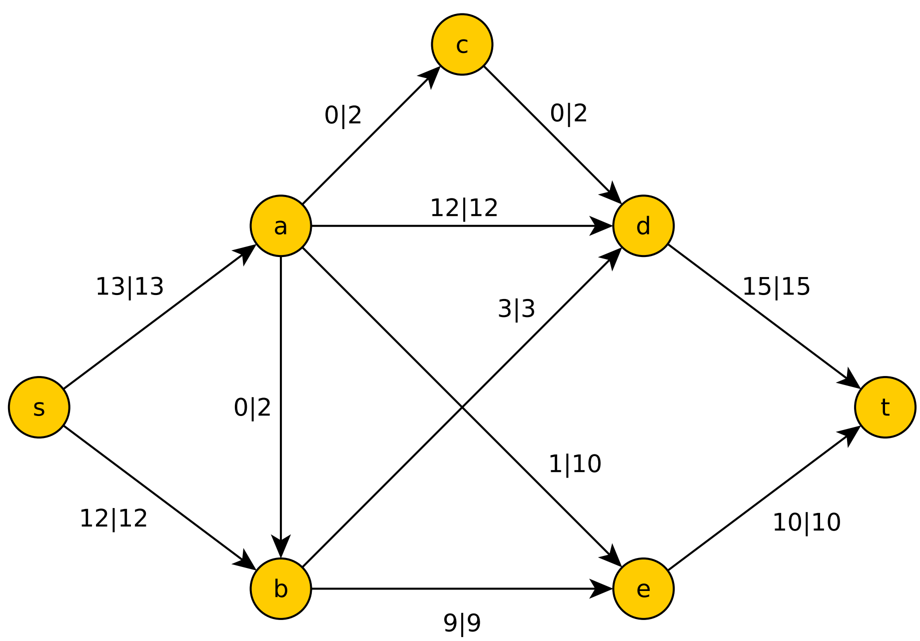
(a) $\Phi(f) = 13$

(b) Der zunehmender Weg (s, a, d, t) ermöglicht eine Flusserhöhung um 3, also $\Phi(f) = 16$.

Name: **Matrikel:**



Der zunehmende Weg (s, b, e, a, d, t) (mit Rückwärtskante) ermöglicht eine Flusserhöhung um 9, also $\Phi(f) = 25$.



(c) Die Kantenmenge $A = \{(s, a), (s, b)\}$ bildet einen Schnitt mit $c(A) = 25 = \Phi(f)$. Also ist nach dem Max-flow-min-cut-Theorem f ein Maximalfluss und A ein minimaler Schnitt.