Statistik und Graphentheorie

Sommersemester 2019
26. September 2019

Teil Graphentheorie

Name:

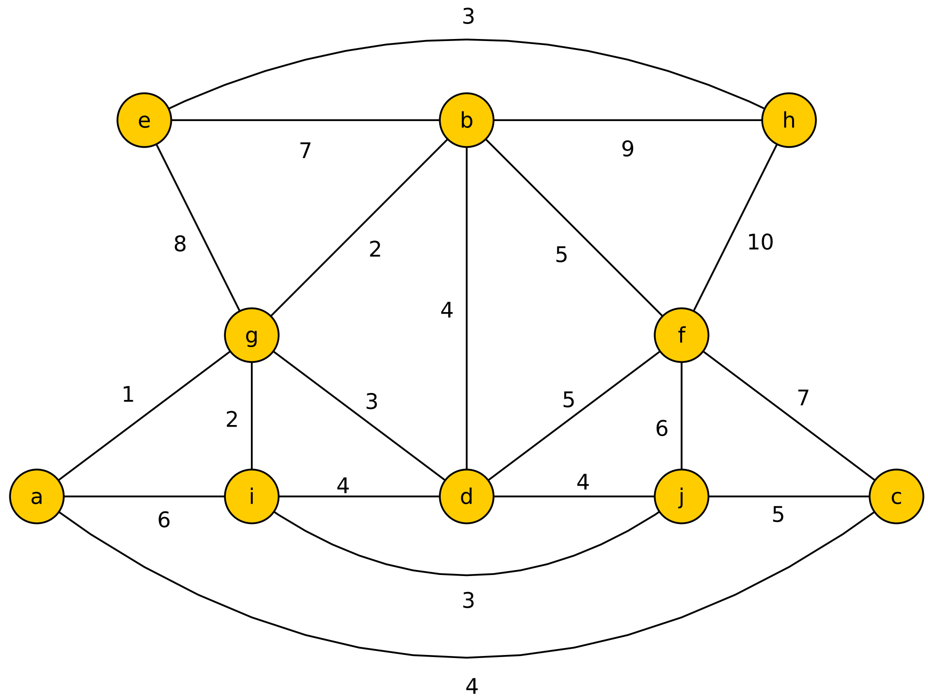
Matrikelnummer:

1 (12)	2 (12)	3 (12)	4 (12)	5 (12)	$\sum$ (60)

Name: **Matrikel:**

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei das folgende Netzwerk:



(a) Berechnen Sie ein Minimalgerüst für diesen Graphen. Geben Sie an, welches Verfahren Sie zur Berechnung verwenden und geben Sie die Kanten des Minimalgerüstes in der Reihenfolge ihrer Selektion an.

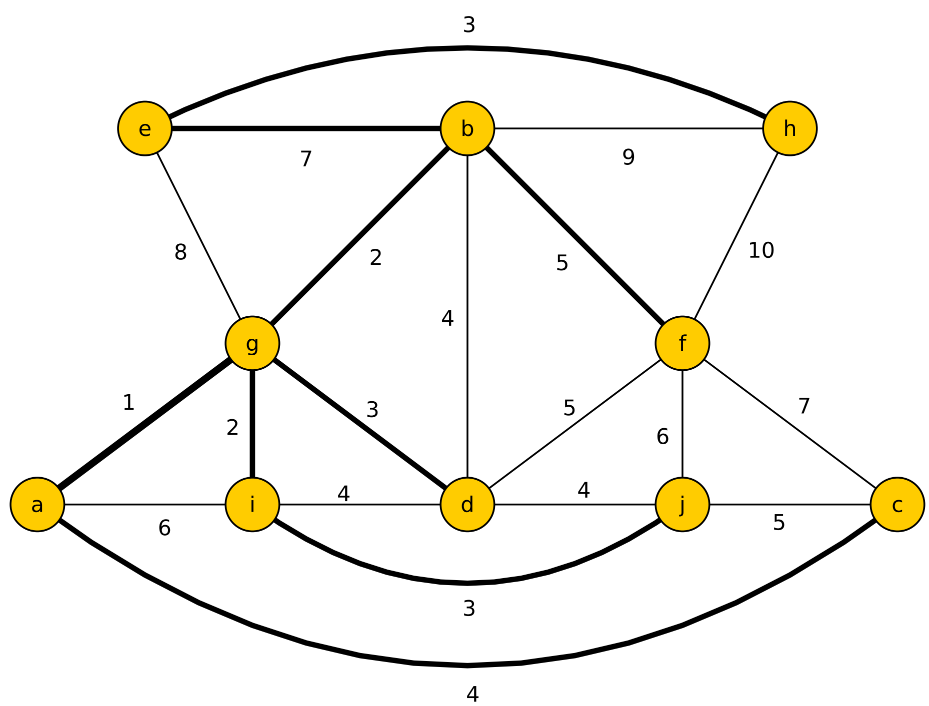
(b) Ist das von Ihnen bestimme Minimalgerüst eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Wir berechnen ein Minimalgerüst mit dem Algorithmus von Kruskal.

Name: **Matrikel:**

ZHKs	Kante	Länge	Selektion
$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\},\{i\},\{j\}$	$\{a,g\}$	1	ja
$\{a,g\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{h\},\{i\},\{j\}$	$\{b,g\}$	2	ja
$\{a,b,g\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{h\},\{i\},\{j\}$	$\{g,i\}$	2	ja
$\{a,b,g,i\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{h\},\{j\}$	$\{d,g\}$	3	ja
$\{a,b,d,g,i\},\{c\},\{e\},\{f\},\{h\},\{j\}$	$\{i,j\}$	3	ja
$\{a,b,d,g,i,j\},\{c\},\{e\},\{f\},\{h\}$	$\{e,h\}$	3	ja
$\{a,b,d,g,i,j\},\{c\},\{e,h\},\{f\}$	$\{a,c\}$	4	ja
$\{a,b,c,d,g,i,j\},\{e,h\},\{f\}$	$\{b,d\}$	4	nein
$\{a,b,c,d,g,i,j\},\{e,h\},\{f\}$	$\{d,i\}$	4	nein
$\{a,b,c,d,g,i,j\},\{e,h\},\{f\}$	$\{d,j\}$	4	nein
$\{a,b,c,d,g,i,j\},\{e,h\},\{f\}$	$\{b,f\}$	5	ja
$\{a,b,c,d,f,g,i,j\},\{e,h\}$	$\{d,f\}$	5	nein
$\{a,b,c,d,f,g,i,j\},\{e,h\}$	$\{c,j\}$	5	nein
$\{a,b,c,d,f,g,i,j\},\{e,h\}$	$\{a,i\}$	6	nein
$\{a,b,c,d,f,g,i,j\},\{e,h\}$	$\{f,j\}$	6	nein
$\{a,b,c,d,f,g,i,j\},\{e,h\}$	$\{b,e\}$	7	ja
$\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$	STOP		



(b) Das Minimalgerüst ist nicht eindeutig. Man könnte bspw. die Kante $\{b,f\}$ gegen die Kante $\{d,f\}$ austauschen.

Name: **Matrikel:**

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Vertreter Franz muss seinen Tag planen. Er hat die Möglichkeit, die folgende Kunden in seiner Nachbarschaft in den angegebenen Zeiten zu besuchen:

Name	von	bis	Provision
Müller	9:00	10:30	80 €
Meier	10:00	11:00	60 €
Schmitz	10:15	13:00	50 €
Fischer	10:45	12:00	70 €
Fleischer	11:45	15:00	100 €
Schumacher	13:15	14:45	60 €
Becker	14:00	15:00	40 €

Bei einem Besuch ist Franz in dem gesamten Zeitraum zwischen „von“ und „bis“ beim Kunden. Da er nicht mehrere Kunden gleichzeitig besuchen kann, muss er sich also überlegen, welche Kunden er besuchen soll, um seine Provision zu maximieren.

(a) Stellen Sie für das vorliegende Problem ein graphentheoretisches Modell auf. Geben Sie den zugehörigen Graphen an und erläutern Sie kurz, wie eine optimale Lösung berechnet werden kann.

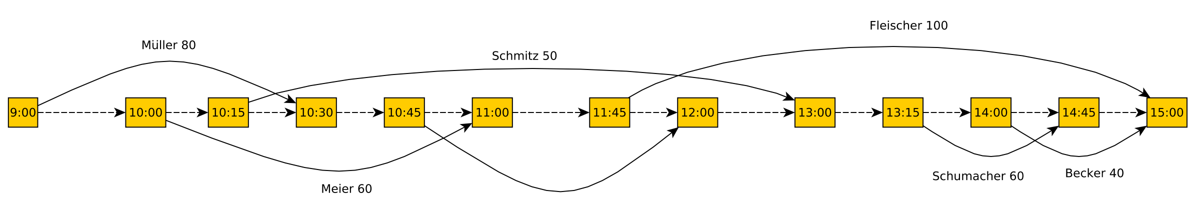
(b) Berechnen Sie einen optimalen Kundenbesuchsplan.

Lösung:

(a) Es gibt verschiedene Möglichkeiten für ein graphentheoretisches Modell. Wir orientieren uns am Modell der Projektplanung (Netzplantechnik) aus der Vorlesung und wählen als Knotenmenge V die verschiedenen Uhrzeiten, die bei “von” bzw. “bis” auftreten.

Jeder Kunde entspricht einer gerichteten Kante mit der “von”-Uhrzeit als Start- und der bis-Uhrzeit als Endknoten. Jeder dieser Kanten wird die Provision als Gewicht zugeordnet.

Zusätzlich führen wir für hintereinander liegende Uhrzeiten noch Dummy-Kanten ein, die mit 0 gewichtet werden. Im folgenden Diagramm sind diese Kanten gestrichelt gezeichnet.



Name: **Matrikel:**

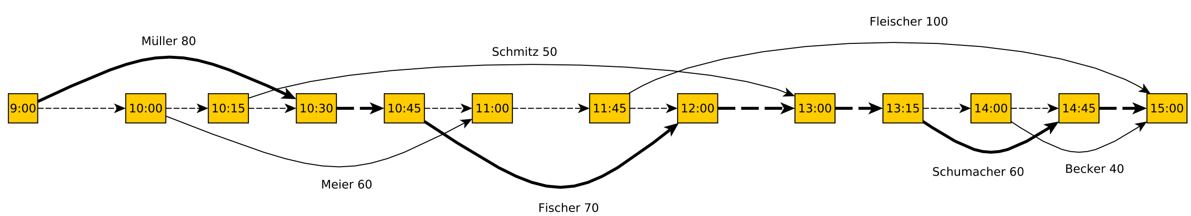
Jeder Weg vom Knoten 9:00 Uhr zum Knoten 15:00 Uhr entspricht einem möglichen Besuchsplan und zu jedem möglichen Besuchsplan gibt es einen Weg. Die Weglänge entspricht der Provision solch eines Plans. Also ergibt sich der optimale Besuchsplan durch einen längsten Weg.

(b) Wir haben einen DAG und berechnen den längsten Weg mit einem Algorithmus gemäß Satz 4.22. Wir erhalten:

v	$d(v)$	$pre(v)$
9:00	0	-
10:00	0	9:00
10:15	0	10:00
10:30	80	9:00
10:45	80	10:30
11:00	80	10:45
11:45	80	11:00
12:00	150	10:45
13:00	150	12:00
13:15	150	13:00
14:00	150	13:15
14:45	210	13:15
15:00	210	14:45

Hier bezeichnet $pre(v)$ den jeweiligen optimalen Vorgängerknoten für v.

Der längste Weg ist somit

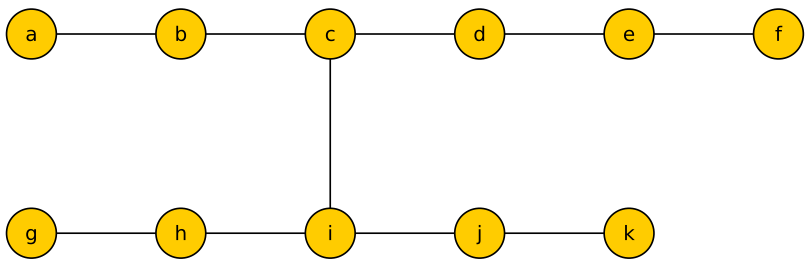


Franz besucht also die Kunden Müller, Fischer und Schumacher.

Name: **Matrikel:**

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Wie viele verschiedene längste einfache Wege enthält der nachfolgende Graph? Geben Sie die Wege an!



(b) Zeigen Sie: Es seien W und W' zwei längste einfache Wege in einem zusammenhängenden Graphen G. Dann haben W und W' mindestens einen gemeinsamen Knoten.

Lösung:

(a) Der Graph enthält zwei längste einfache Wege:

- (f, e, d, c, i, j, k)
- (f, e, d, c, i, h, g)

(b) G sei ein zusammenhängender Graph, der zwei längste Wege W und W' mit Länge l enthält.

Annahme: W und W' haben keinen gemeinsamen Knoten.

Da G zusammenhängend ist, können W und W' durch einen Weg $W'' = (a, \ldots, b)$ verbunden werden, der bis auf die Endpunkte $a \in W$ und $b \in W'$ keinen Knoten mit W oder W' gemeinsam hat. W'' hat mindestens die Länge 1.

Die Knoten a und b teilen W bzw. W' so, dass jeweils mindestens ein Teilweg die Länge $\geq l/2$ hat.

Wir konkatenieren die längeren Teilwege von W und W' sowie W'' zu einem neuen Weg. Dieser Weg hat eine Länge $\geq l/2 + l/2 + 1 = l + 1$. Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass W und W' längste Wege sind.

Name: **Matrikel:**

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} \text{ mit } a_0 = 0 \text{ und } a_1 = 1.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 5.$$

Damit sind

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+5} = 1 \pm \sqrt{6}$$

die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und

$$a_n = \alpha(1+\sqrt{6})^n + \beta(1-\sqrt{6})^n$$

ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2}$.

Aus den beiden Anfangsbedingungen $a_0 = 0, a_1 = 1$ erhalten wir das LGS

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 0 \\ (1+\sqrt{6})\alpha & + & (1-\sqrt{6})\beta & = & 1 \end{array}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit $1-\sqrt{6}$ ergibt

$$\begin{array}{rcrcl} (1-\sqrt{6})\alpha & + & (1-\sqrt{6})\beta & = & 0 \\ (1+\sqrt{6})\alpha & + & (1-\sqrt{6})\beta & = & 1 \end{array}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt zu

$$-2\sqrt{6}\alpha = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

Also ist

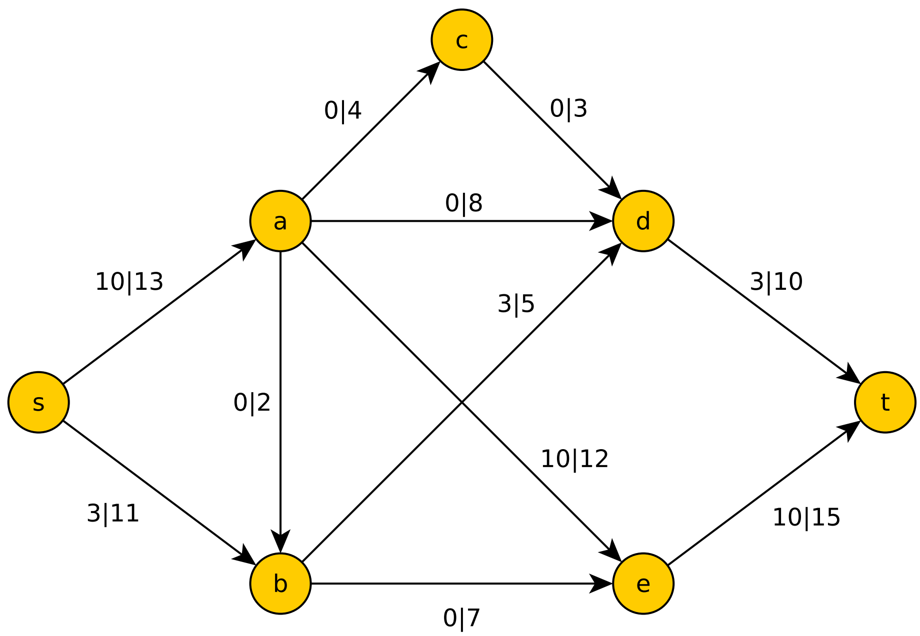
$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left((1+\sqrt{6})^n - (1-\sqrt{6})^n\right)$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Name: **Matrikel:**

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Gegeben ist das folgende Flussnetzwerk mit Kapazitäten und einem Fluss f.



(a) Geben Sie den aktuellen Flusswert $\Phi(f)$ an.

(b) Berechnen Sie einen Maximalfluss. Geben Sie dabei für jeden Schritt einen zunehmenden Weg und den Flusswert $\Phi(f)$ an.

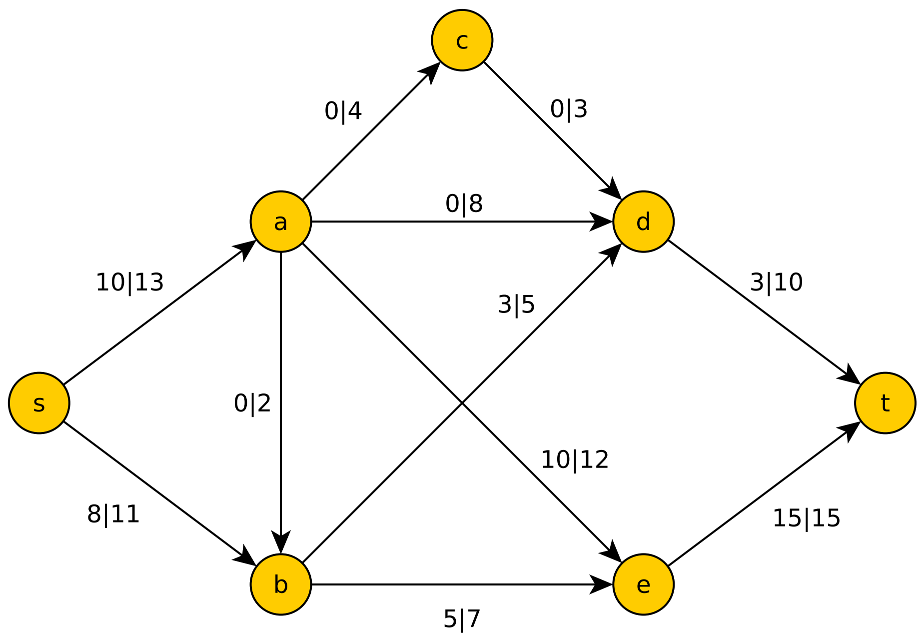
(c) Begründen Sie, dass der in (b) berechnete Fluss ein Maximalfluss ist.

Lösung:

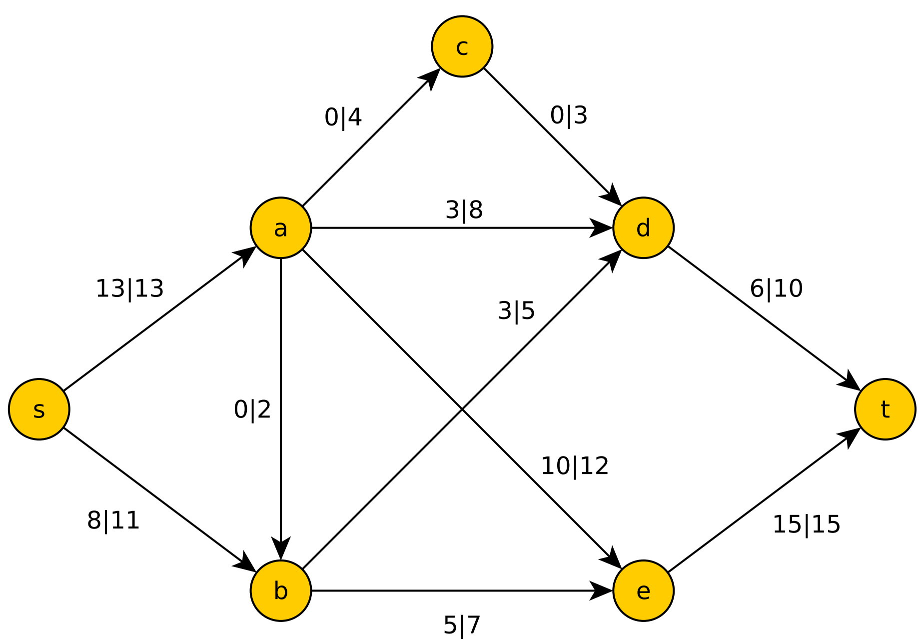
(a) $\Phi(f) = 13$

(b) Der zunehmende Weg (s, b, e, t) ermöglicht eine Flusserhöhung um 5, also $\Phi(f) = 18$.

Name: **Matrikel:**

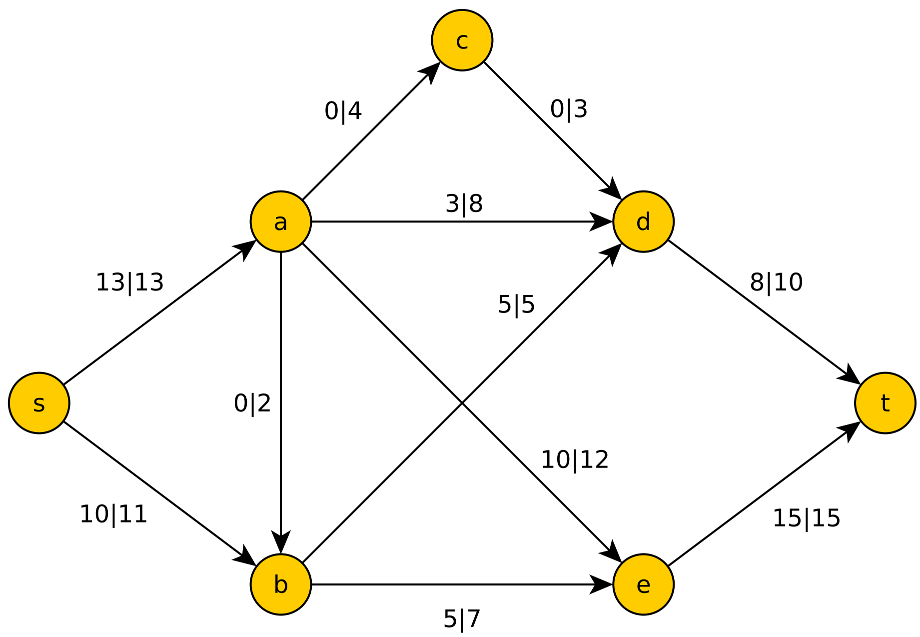


Der zunehmende Weg (s, a, d, t) ermöglicht eine Flusserhöhung um 3, also $\Phi(f) = 21$.

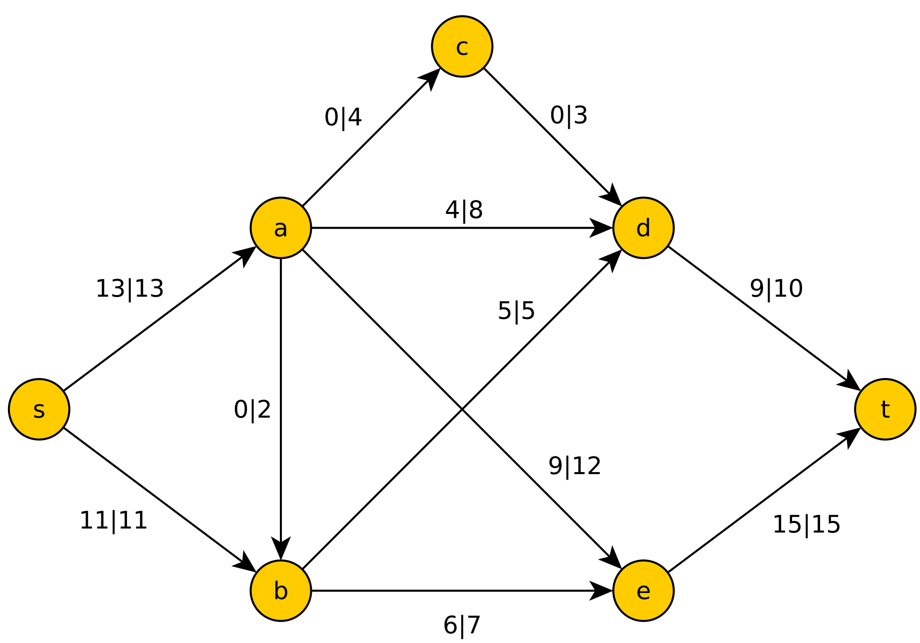


Der zunehmende Weg (s, b, d, t) ermöglicht eine Flusserhöhung um 2, also $\Phi(f) = 23$.

Name: **Matrikel:**



Der zunehmende Weg (s, b, e, a, d, t) ermöglicht eine Flusserhöhung um 1, also $\Phi(f) = 24$.



(c) Die Kantenmenge $A = \{(s, a), (s, b)\}$ bildet einen Schnitt mit Kapazität $c(A) = \Phi(f) = 24$. Also ist f nach dem Max-Flow-Min-Cut-Theorem ein Maximalfluss.

Name: **Matrikel:**