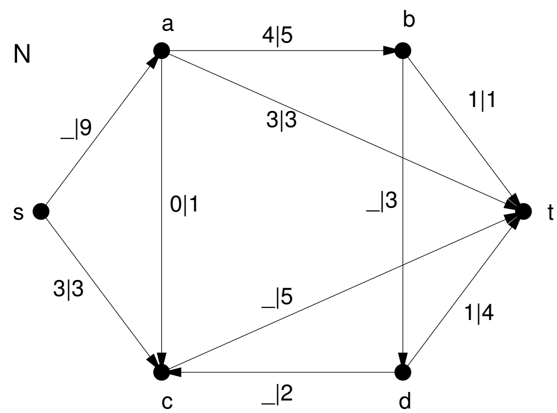
Graphentheorie

Lösungen zu Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1 (Fluss und zunehmende Wege)

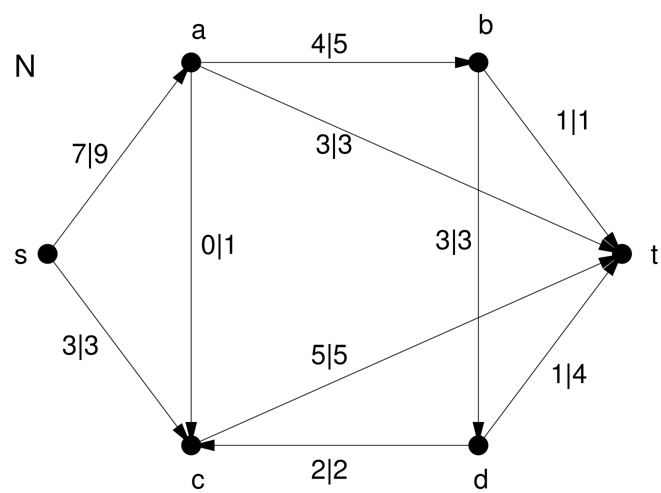
(a) In dem folgenden Flussnetzwerk N ist nicht für alle Kanten e ein Wert für $f(e)$ angegeben. Vervollständigen Sie die Werte für f, so dass f ein Fluss auf N ist. Bestimmen Sie auch den Wert $\Phi(f)$.



(b) Finden Sie einen zunehmenden Weg bezüglich des in (a) bestimmten Flusses f. Erhöhen Sie den Flusswert auf Basis dieses zunehmenden Weges. Ist der so entstandene Fluss ein Maximalfluss?

Lösung:

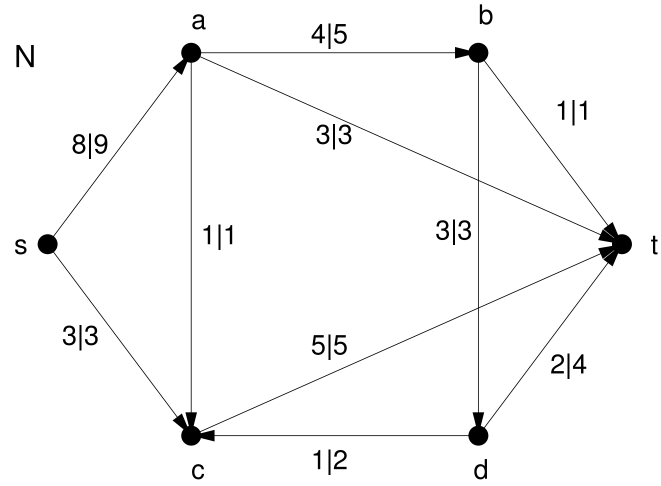
(a) $\Phi(f) = 10$



(b) Der Weg (s, a, c, d, t) ist ein zunehmender Weg. Hierbei ist (c, d) eine Rückwärtskante, auf der der Fluss verringert wird. Auf allen anderen Kanten wird der Fluss erhöht.

Die Flusserhöhung beträgt 1, gegeben durch die Kante (a, c). Wir erhalten:

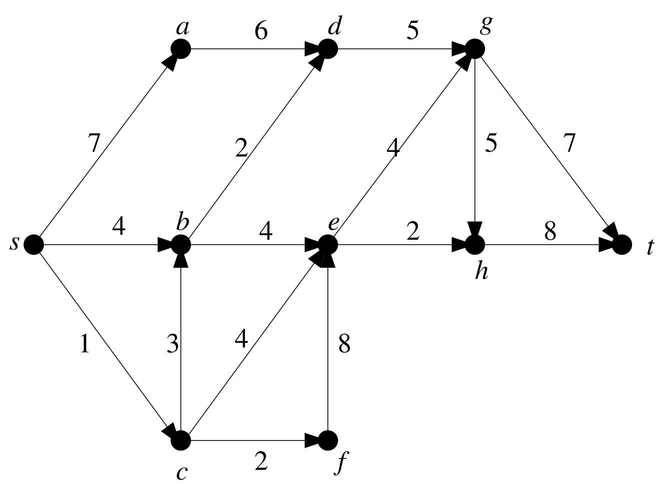
$\Phi(f) = 11$



Dieser Fluss ist ein Maximalfluss, denn die Kanten $(s,c),(a,c),(a,t),(b,d),(b,t)$ trennenden die Quelle s von der Senke t und haben eine Gesamtkapazität von 11.

Aufgabe 2 (Maximalfluss und minimaler Schnitt)

(a) Berechnen Sie für das folgende Flussnetzwerk einen Maximalfluss.

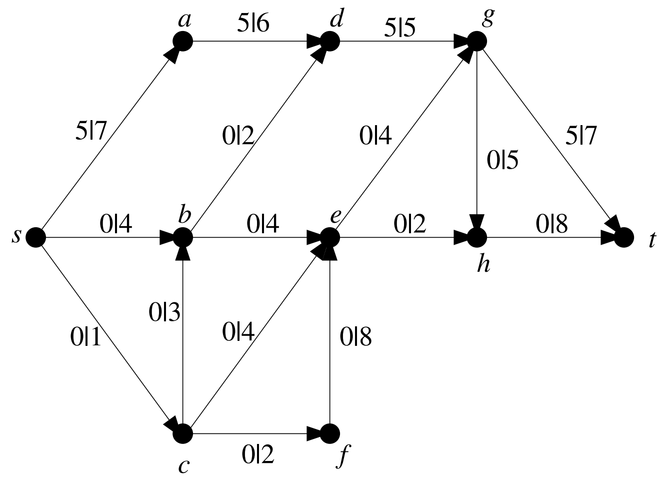


Geben Sie die einzelnen Schritte der Berechnung an.

(b) Finden Sie zu dem Flussnetzwerk aus (a) einen minimalen Schnitt.

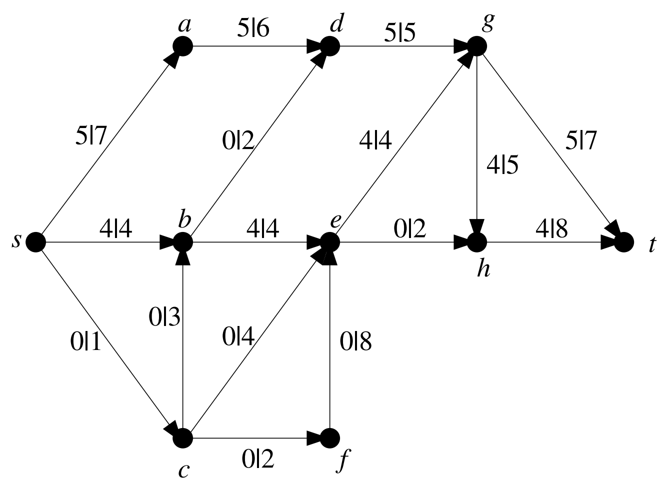
Lösung:

(a) (s,a,d,g,t) ist ein zunehmender Weg mit einer möglichen Flusserhöhung um 5.



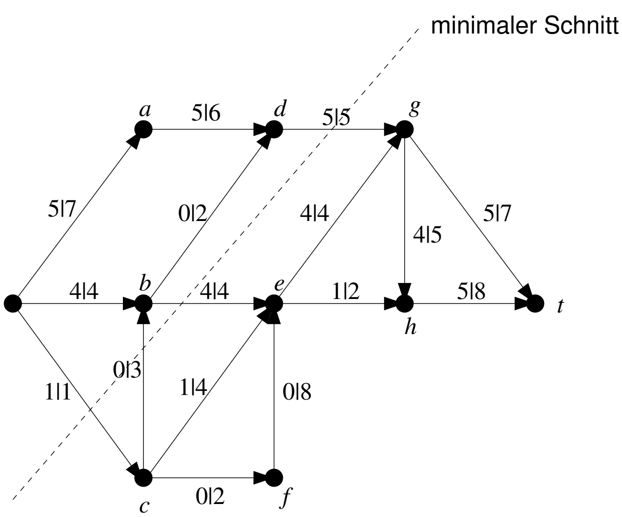
Dieser Fluss f hat einen Wert $\Phi(f) = 5$.

Ein weiterer zunehmender Weg ist (s, b, e, g, h, t), mit einer Flusserhöhung um 4. Wir erhalten



und $\Phi(f) = 9$.

(s, c, e, h, t) ist ein zunehmender Weg mit einer Flusserhöhung um 1. Wir erhalten



und $\Phi(f) = 10$.

(b) Der Fluss aus (a) ist ein Maximalfluss, denn der trennende Schnitt $\{(d, g), (b, e), (s, c)\}$ (siehe Zeichnung) hat eine Kapazität von $10 = \Phi(f)$. Mit dem Max-Flow-Min-Cut-Theorem folgt, dass der vorliegende Fluss ein Minimalfluss ist und der genannte Schnitt ein minimaler Schnitt.