Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

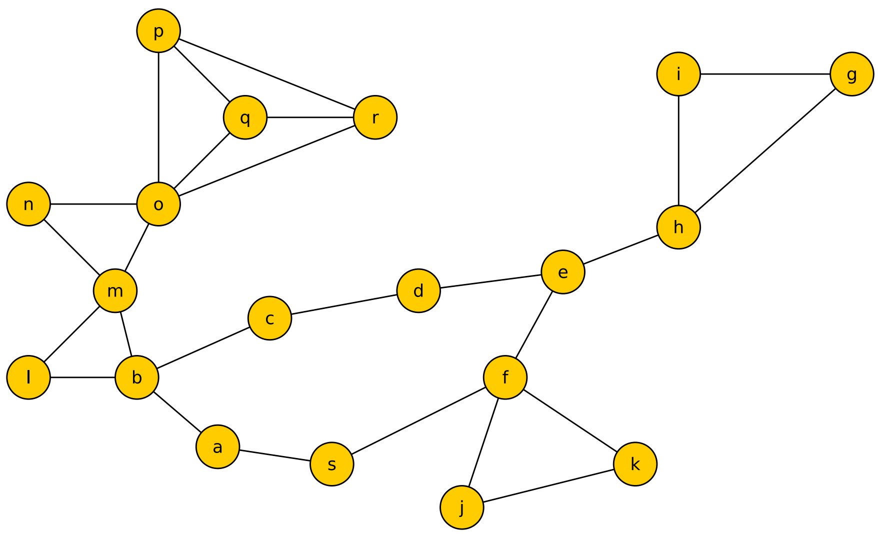
Fachbereich Informatik
Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. Peter Becker

Graphentheorie

Lösungen zu Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1 (Anzahl an Gerüsten)

Wie viele verschiedene Gerüste gibt es für den folgenden Graphen?



Lösung: Der Graph besteht aus einem Kreis $K = (a, b, c, d, e, f, s, a)$, an dem verschiedene vollständige Graphen hängen.

$\{f, j, k\}$
$\{g, h, i\}$ verbunden über die Kante $\{e, h\}$
$\{b, l, m\}$
$\{m, n, o\}$ hängt an $\{b, l, m\}$
$\{o, p.q, r\}$ hängt an $\{m, n, o\}$

Jedes Gerüst des Gesamtgraphen besteht aus einem Gerüst für K, Gerüsten für die vollständigen Graphen und der Kante $\{e, h\}$.

Für die vollständigen Graphen ergibt sich die Anzahl der Gerüste aus dem Satz von Cayley:

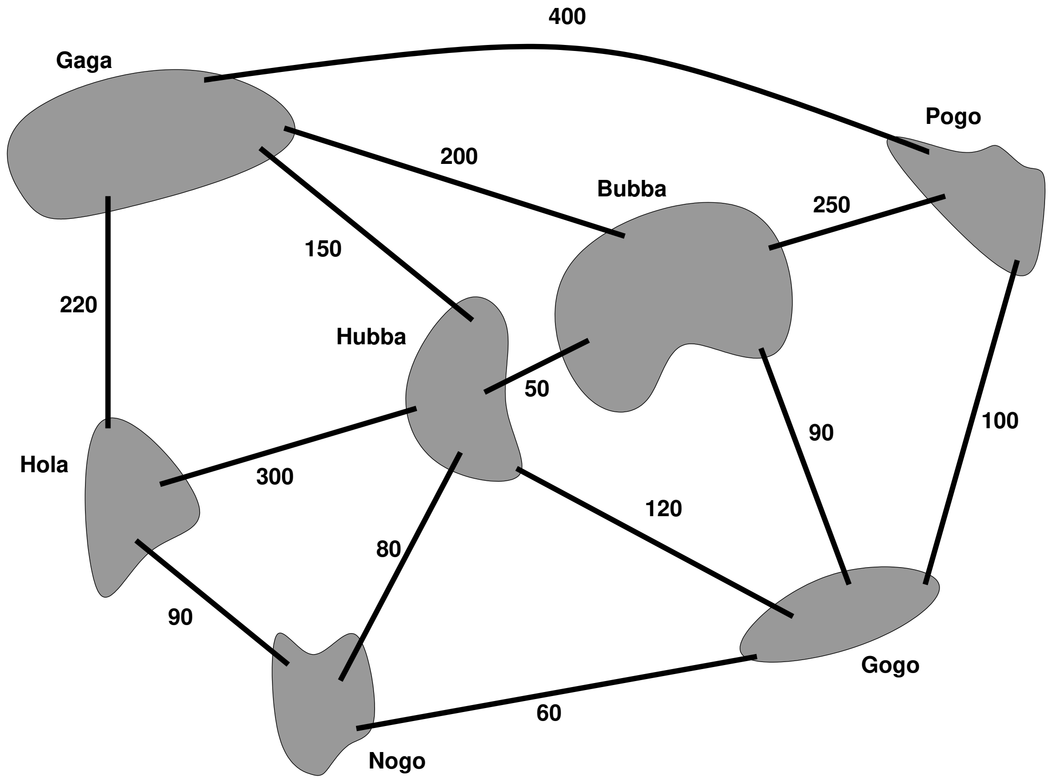
vollständiger Graph	Anzahl Gerüste
$\{f, j, k\}$	3
$\{g, h, i\}$	3
$\{b, l, m\}$	3
$\{m, n, o\}$	3
$\{o, p.q, r\}$	16

Für den Kreis K gibt es 7 verschiedene Gerüste, weil der Kreis aus sieben Kanten besteht. Die Gesamtanzahl der Gerüste beläuft sich daher auf:

$$\text{Anzahl Gerüste} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 7 = 9072$$

Aufgabe 2 (Minimalgerüst)

Der Inselstaat Hubba-Bubba besteht aus insgesamt sieben Inseln, die durch Brücken miteinander verbunden sind (siehe Zeichnung). Da die Wartung und der Betrieb der Brücken auf die Dauer zu teuer wird, überlegt man, einige der Brücken stillzulegen. Die Zahlen an den Brücken geben die jährlichen Wartungskosten an.



Welche Brücken sollen stillgelegt werden, so dass die jährlichen Wartungskosten minimal werden, unter der Bedingung, dass jede Insel von jeder anderen Insel erreichbar bleibt?

(a) Erläutern Sie kurz, wie Sie das oben beschriebene Problem lösen können und berechnen Sie eine Lösung.

(b) Ist die in (a) ermittelte Lösung eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Damit noch jede Insel von jeder anderen Insel erreichbar ist, wird ein Gerüst benötigt. Das Gerüst mit den geringsten Wartungskosten ist dann ein Minimalgerüst. Alle Brücken, die nicht zum Minimalgerüst gehören, werden stillgelegt. Die Berechnung des Minimalgerüstes kann mit dem Algorithmus von Prim oder dem Algorithmus von Kruskal erfolgen. Wir benutzen hier den Algorithmus von Kruskal.

i	ZHK	$\{v, w\}$	Länge	Selektion
1	$\{\{Hubba\}, \{Bubba\}, \{Gaga\}, \{Hola\}, \{Nogo\}, \{Gogo\}, \{Pogo\}\}$	$\{Hubba, Bubba\}$	50	ja
2	$\{\{Hubba, Bubba\}, \{Gaga\}, \{Hola\}, \{Nogo\}, \{Gogo\}, \{Pogo\}\}$	$\{Nogo, Gogo\}$	60	ja
3	$\{\{Hubba, Bubba\}, \{Gaga\}, \{Hola\}, \{Nogo, Gogo\}, \{Pogo\}\}$	$\{Hubba, Nogo\}$	80	ja
4	$\{\{Hubba, Bubba, Nogo, Gogo\}, \{Gaga\}, \{Hola\}, \{Pogo\}\}$	$\{Bubba, Gogo\}$	90	nein
5	$\{\{Hubba, Bubba, Nogo, Gogo\}, \{Gaga\}, \{Hola\}, \{Pogo\}\}$	$\{Hola, Nogo\}$	90	ja
6	$\{\{Hubba, Bubba, Nogo, Gogo, Hola\}, \{Gaga\}, \{Pogo\}\}$	$\{Gogo, Pogo\}$	100	ja
7	$\{\{Hubba, Bubba, Nogo, Gogo, Hola, Pogo\}, \{Gaga\}\}$	$\{Hubba, Gogo\}$	120	nein
8	$\{\{Hubba, Bubba, Nogo, Gogo, Hola, Pogo\}, \{Gaga\}\}$	$\{Hubba, Gaga\}$	150	ja
	$\{\{Hubba, Bubba, Nogo, Gogo, Hola, Pogo, Gaga\}\}$		STOP	

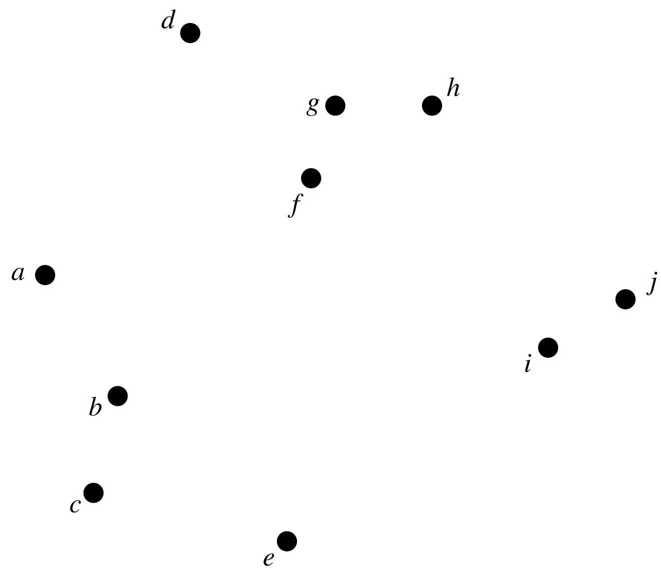
Stillgelegt werden dann folgende Brücken: (Bubba, Gogo), (Hubba, Gogo), (Bubba, Gaga), (Hola, Gaga), (Bubba, Pogo), (Hubba, Hola), (Gaga, Pogo)

(b) Die Lösung ist eindeutig.

Aufgabe 3 (TSP-Heuristik)

Gegeben Sei die folgende Punktmenge im $\mathbb{R}^2$:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	1350	2025	1800	2700	3600	3825	4050	4950	6030	6750
y	4500	5625	6525	2250	6975	3600	2925	2925	5175	4725



Die x-Koordinate wächst hierbei nach rechts, die y-Koordinate nach *unten*!

(a) Berechnen Sie ein Minimalgerüst für diese Punktmenge. Die Punkte entsprechen hierbei den Knoten eines vollständigen Graphen und das Gewicht einer Kante ergibt sich durch den euklidischen Abstand der beiden beteiligten Punkte (Knoten).

(b) Konstruieren Sie aus dem Minimalgerüst von (a) eine TSP-Tour, die höchstens doppelt so lang ist, wie eine optimale TSP-Tour.

(c) Versuchen Sie anschließend, die TSP-Tour von (b) mit Hilfe der Algorithmen `2-opt` und `3-opt` so weit wie möglich zu verbessern. Geben Sie die jeweiligen Austauschschritte an.

Lösung: Da wir uns in der euklidschen Ebene befinden, gilt die Dreiecksungleichung. Wir benutzen Satz 5.14 der Vorlesung bzw. das im Beweis verwendete Konstruktionsverfahren (siehe Folien 216 bis 218).

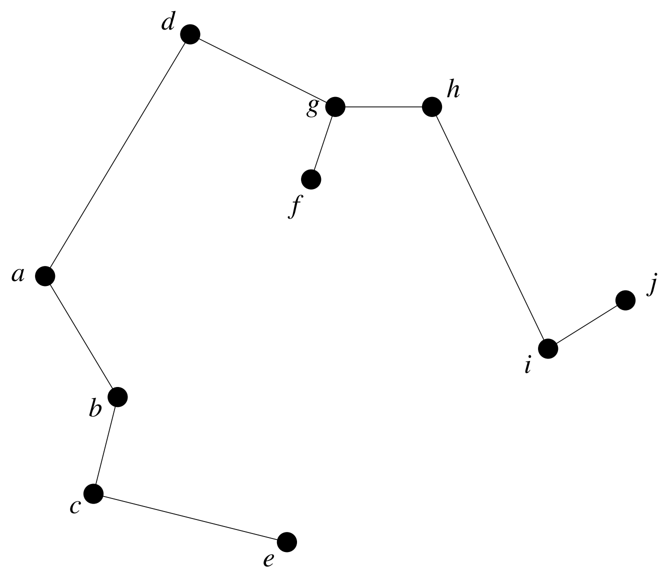
Zunächst müssen wir ein Minimalgerüst berechnen. Hier bietet sich der Algorithmus von Kruskal an. Durch die Zeichnung sehen wir leicht, dass die folgenden Kanten im Minimalgerüst enthalten sind:

$$\{f,g\}, \{g,h\}, \{d,g\}, \{i,j\}, \{b,c\}, \{a,b\}, \{c,e\}$$

Jetzt fehlen noch zwei Kanten. Wir vergleichen in Frage kommende Kanten:

Kante	Länge
$\{a, d\}$	2623.9
$\{a, f\}$	2633.5
$\{b, f\}$	2709.4
$\{f, i\}$	2709.7
$\{h, i\}$	2495.7
$\{h, j\}$	2545.5
$\{e, i\}$	3024.0

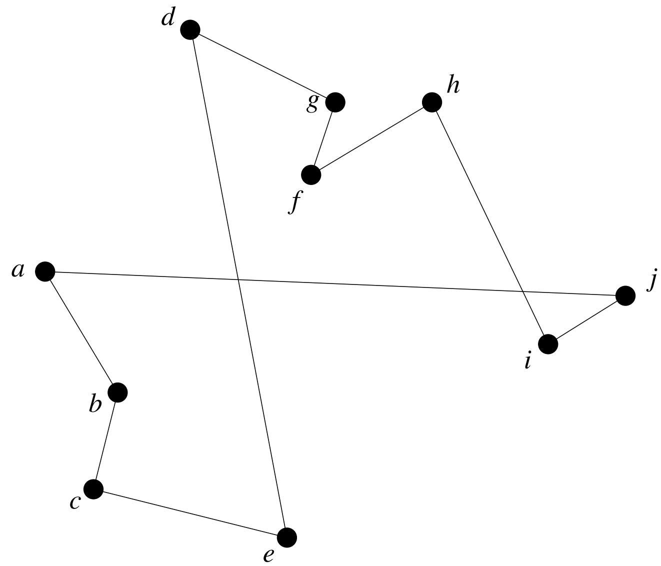
Also sind im Minimalgerüst auch noch die Kanten $\{h, i\}$ und $\{a, d\}$ enthalten.



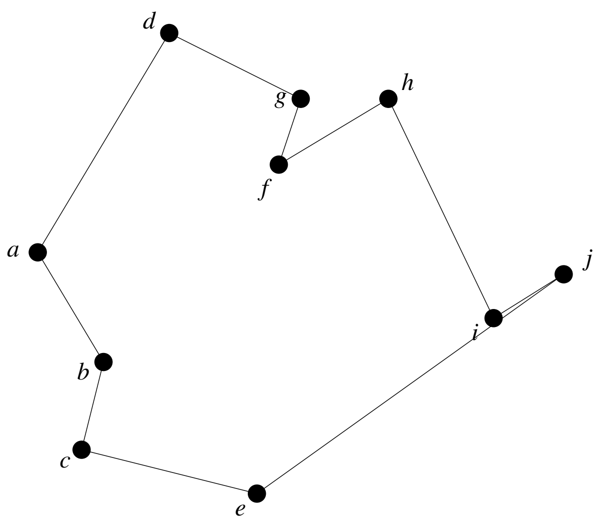
Zur Konstruktion einer Tour führt man auf dem Minimalgerüst eine Tiefensuche durch, ausgehend von einem beliebigen Startknoten. Starten wir im Knoten a, so erhalten wir die folgende DFS-Numerierung:

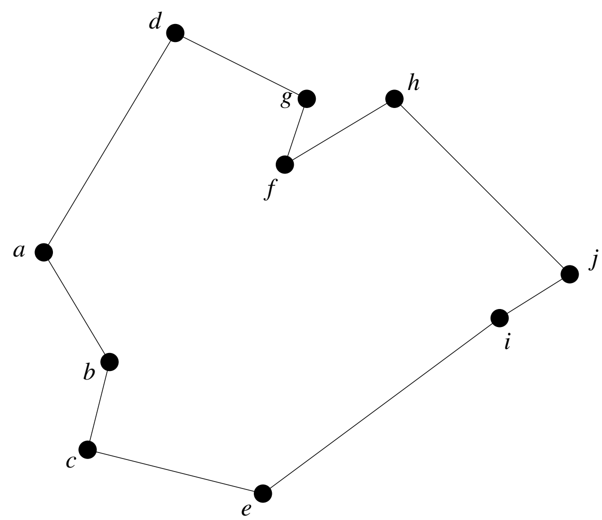
DFS-Nummer	Knoten
1	a
2	b
3	c
4	e
5	d
6	g
7	f
8	h
9	i
10	j

Damit ist die Tour $(a, b, c, e, d, g, f, h, i, j, a)$ höchstens doppelt so lang wie die optimale Tour (die wir nicht kennen).

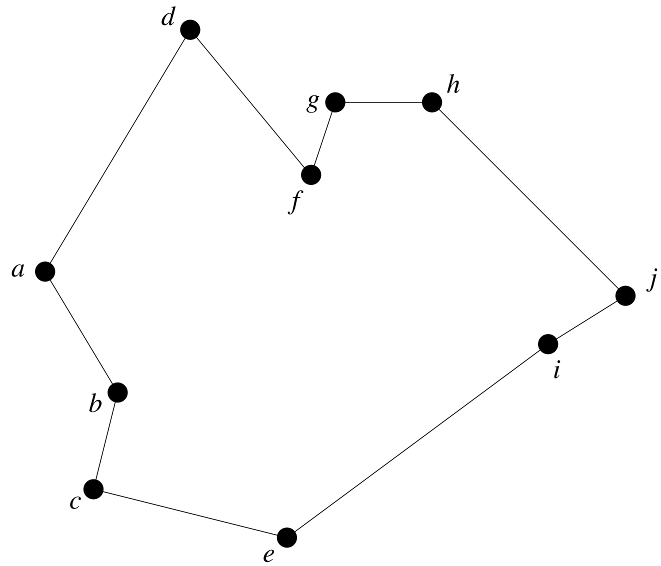


Die Tour $(a, b, c, e, d, g, f, h, i, j, a)$ kann mit den Verfahren 2-opt und 3-opt noch deutlich verbessert werden. Hierzu eliminieren wir mit Hilfe eines 2-opt Schrittes die Kreuzung der Kanten $\{a, j\}$ und $\{d, e\}$. Wir nehmen diese Kanten heraus und fügen staddessen $\{a, d\}$ und $\{e, j\}$ ein (siehe Tour links). Im nächsten 2-opt Schritt tauschen wir $\{h, i\}$ und $\{e, j\}$ gegen $\{h, j\}$ und $\{e, i\}$ (siehe Tour rechts).





Eine letzte kleine Verbesserung erhalten wir, wenn wir $\{f, h\}$ und $\{d, g\}$ gegen $\{h, g\}$ und $\{d, f\}$ austauschen.



Aufgabe 4 (Clusteranalyse)

Gegeben sei eine Menge V von Objekten sowie eine Metrik (Abstandsmaß) $d(u, w)$, die für je zwei Elemente $u, w \in V$ deren Abstand angibt.

Die Menge V soll nun so in zwei nichtleere disjunkte Teilmenge U und W zerlegt werden, dass die Größe

$$d(U, W) := \min_{u \in U, w \in W} d(u, w)$$

maximiert wird.

Skizzieren Sie kurz, wie Sie dieses Problem mit Hilfe der Graphentheorie lösen können.

Zerlegen Sie anschließend die Menge $V = \{a, b, d, f, k, w\}$ in zwei Teilmengen U und W, so dass $d(U, W)$ maximal wird. Für die Elemente von V gelten dabei die folgenden Abstände an:

	a	b	d	f	k	w
a	0	91	80	259	70	121
b	91	0	77	175	27	84
d	80	77	0	232	47	29
f	259	175	232	0	189	236
k	70	27	47	189	0	55
w	121	84	29	236	55	0

Lösung: Aus Lemma 5.5 wissen wir, dass es zu der Größe $d(U, W) = \min_{u \in U, w \in W} d(u, w)$ eine Kante im Minimalgerüst gibt (man beachte: es gilt $W = V \setminus U$). Daher entspricht $\max d(U, W)$ der längsten Kante in einem Minimalgerüst.

Also berechnet man das Minimalgerüst und entfernt die längste Kante. Dadurch entstehen zwei Zusammenhangskomponenten. Die Knotenmengen der beiden Zusammenhangskomponenten bilden die Mengen U und $W = V \setminus U$.

Für die angegebenen Knotenabstände erhalten wir $U = \{a, b, d, k, w\}$ und $W = \{f\}$ und $d(U, W) = 175$.

Bemerkung: Die Knoten repräsentieren hier die Städte Aachen (a), Bonn (b), Düsseldorf (d), Köln (k), Wuppertal (w) und Frankfurt (f), die Kantenlängen stehen für die Entfernung zwischen diesen Städten im Straßennetz. Wenn Sie die Aufgabe richtig gelöst haben, dann enthält die eine Gruppe die Städte im Rheinland und die andere Gruppe Frankfurt.