

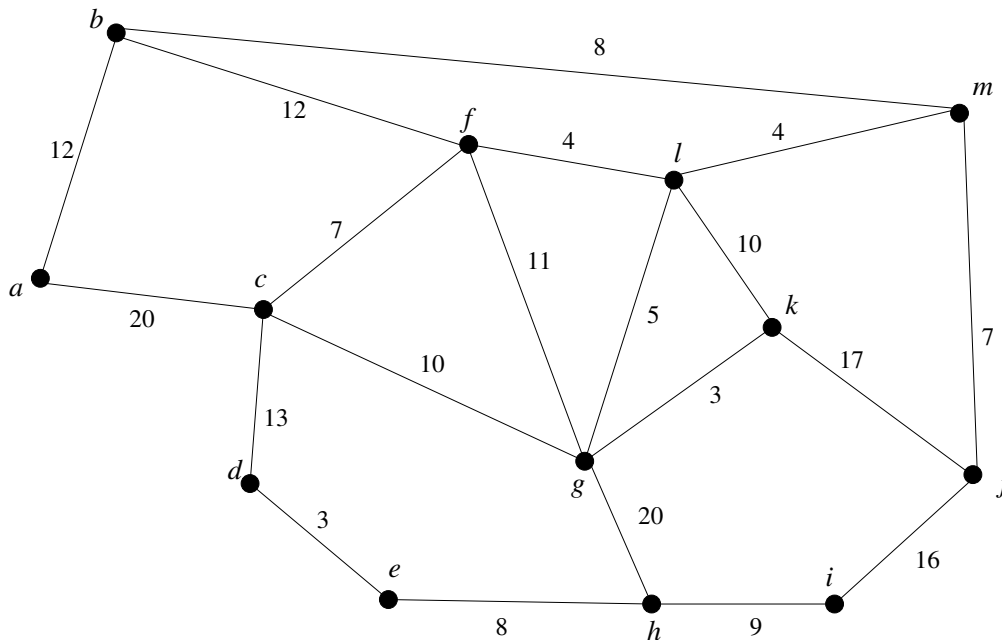


Graphentheorie

Lösungen zu Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1 (Kürzeste Wege, Dijkstra-Algorithmus)

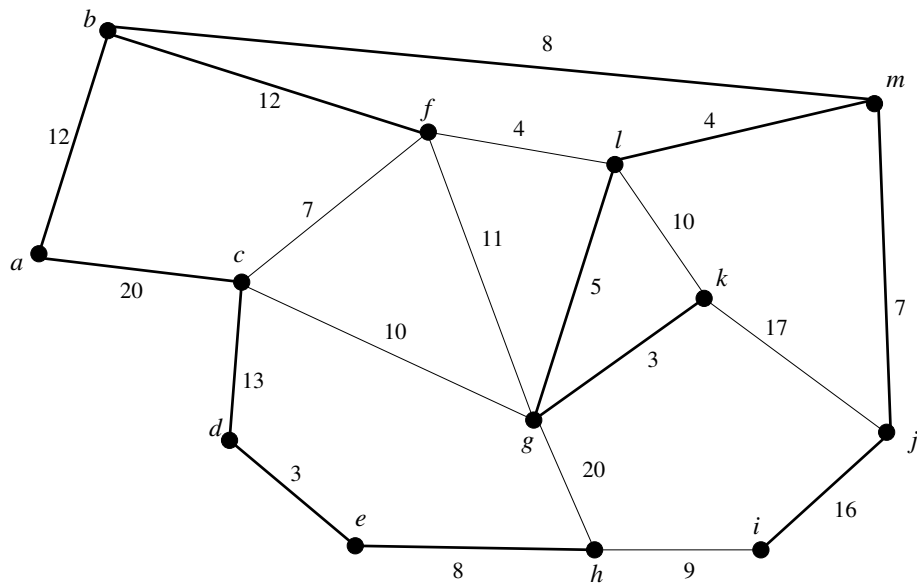
Berechnen Sie für das unten angegebene Netzwerk die Abstände und die kürzesten Wege vom Knoten a zu allen anderen Knoten.



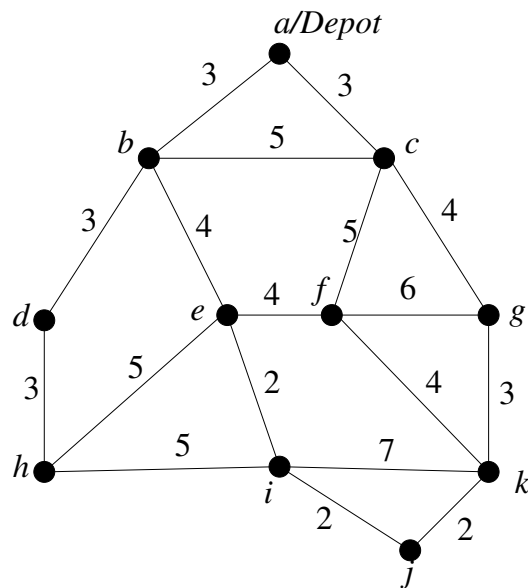
Lösung:

Iteration	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	u	$d(u)$	$p(u)$
1	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	a	0	—
2		12	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	b	12	a
3			20	—	—	24	—	—	—	—	—	—	20	c	20	a
4				33	—	24	30	—	—	—	—	—	20	m	20	b
5				33	—	24	30	—	—	27	—	24	—	f	24	b
6				33	—	—	30	—	—	27	—	24	—	l	24	m
7				33	—	—	29	—	—	27	34	—	—	j	27	m
8				33	—	—	29	—	43	—	34	—	—	g	29	l
9				33	—	—	—	49	43	—	32	—	—	k	32	g
10				33	—	—	—	49	43	—	—	—	—	d	33	c
11				—	36	—	—	49	43	—	—	—	—	e	36	d
12				—	—	—	—	44	43	—	—	—	—	i	43	j
13				—	—	—	—	44	—	—	—	—	—	h	44	e

Gerüst mit den kürzesten Wegen:



Aufgabe 2 (Müllabfuhr)



Der angegebene Graph modelliert ein Straßennetz, die Kantenbewertungen geben die Straßenlängen an.

Ermitteln Sie eine möglichst kurze Route für die Müllabfuhr in diesem Straßennetz. Anforderungen:

- Das Müllauto muss im Depot starten und wieder zu diesem zurückkehren.
- Jede Straße muss mindestens einmal durchfahren werden.

Machen Sie die Herleitung Ihrer Route deutlich.

Lösung: Der theoretische Idealfall würde vorliegen, wenn das Straßennetz einen eulerschen Graphen bildet. Dann wäre ein Eulerkreis die optimale Lösung.

Der gegebene Graph ist aber nicht eulersch, denn er enthält zwei Knoten (g und h) mit ungeradem Grad. Zu einer optimalen Lösung kommen wir, indem wir zwischen diesen Knoten eine zusätzliche Kante einfügen. Diese Kante muss dabei dem kürzesten Weg von g nach h entsprechen.

Mit dem Algorithmus von Dijkstra können wir den kürzesten Weg von g nach h berechnen. Dies ist (g, k, j, i, h) mit der Länge 12.

Wir berechnen nun für den Graphen, der zusätzlich die Kante $\{g, h\}$ enthält, einen Eulerkreis (z.B. mit dem Algorithmus von Hierholzer). Wir erhalten:

$$(a, b, d, h, i, j, k, g, c, b, e, f, g, h, e, i, k, f, c, a)$$

Für die Kante (g, h) setzen wir den zuvor ermittelten kürzesten Weg ein und erhalten somit als optimale Route:

$$(a, b, d, h, i, j, k, g, c, b, e, f, g, k, j, i, h, e, i, k, f, c, a)$$

Aufgabe 3 (Textfaktorisation)

Die Nachricht `babbbaabba` soll mit dem folgenden Code codiert werden:

Text	Code	Länge
a	00	2
b	010	3
ba	0110	4
bb	0111	4
abb	1	1

Beispiel für eine mögliche Codierung der Nachricht:

```

ba   bb   ba   a   bb   a
0110 0111 0110 00 0111 00

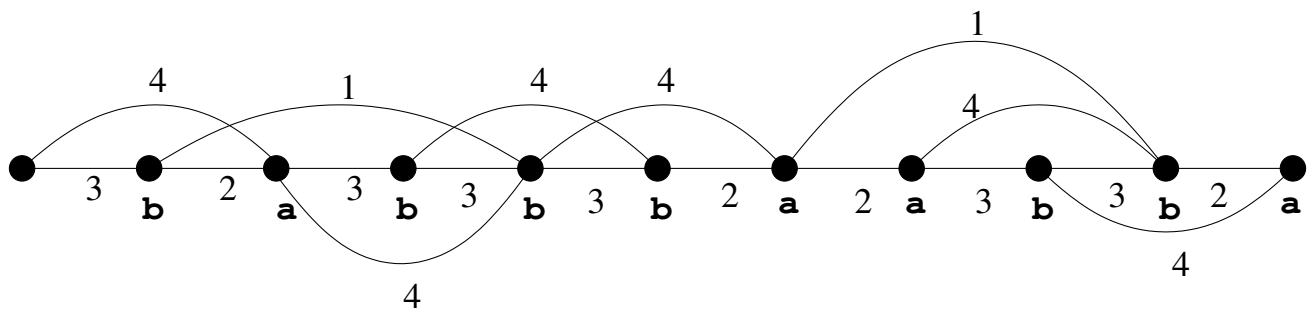
```

Die Gesamtlänge dieser Codierung ist 20.

Finden Sie eine Codierung mit minimaler Gesamtlänge. Erläutern Sie hierzu kurz, wie Sie dieses Problem mit Hilfe der Graphentheorie lösen können und berechnen Sie eine Lösung.

Lösung: Sei $text = babbbaabba = c_1 \dots c_{10}$. Wir definieren einen gerichteten azyklischen Graphen $G = (V, A)$ mit $V = \{0, \dots, 10\}$ und $A = \{(i, j) | c_{i+1} \dots c_j \text{ ist im Code}\}$.

Die Länge $w(e)$ einer gerichteten Kante $e \in A$ ergibt sich durch die Länge der zugehörigen Codierung im Code.



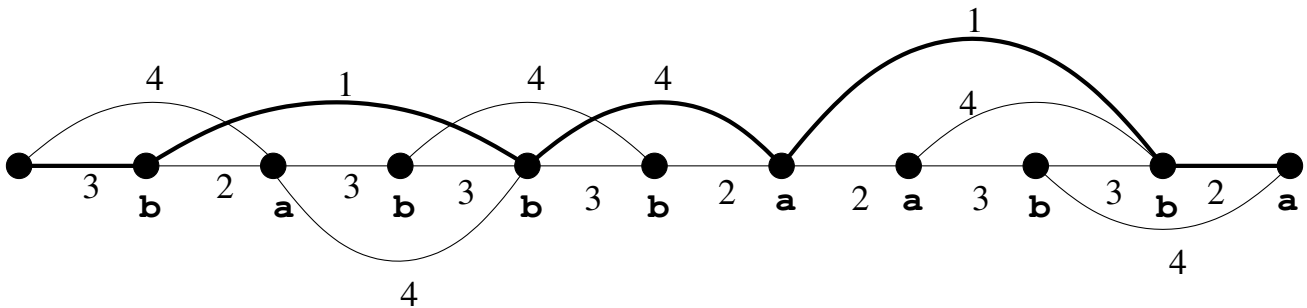
Jeder Weg von 0 nach 10 legt eine Codierung fest. Somit erhält man eine Codierung mit minimaler Gesamtlänge durch einen kürzesten Weg von 0 nach 10. Dieser kann mit dem Algorithmus von Dijkstra oder durch die Rekursionsformel gemäß Satz 4.22 bestimmt werden. Für die Rekursionsformel erhalten wir:

v	$d(v)$	$best(v)$	Text
0	0	-	-
1	3	0	b
2	4	0	ba
3	7	2	b
4	4	1	abb
5	7	4	b
6	8	4	ba
7	10	6	a
8	13	7	b
9	9	6	abb
10	11	9	a

Damit ist

b	abb	ba	abb	a
010	1	0110	1	00

eine Codierung mit minimaler Gesamtlänge 11. Veranschaulichung des kürzesten Weges:



Bemerkung: Der vorgegebene Code ist übrigens ein Präfixcode. Eine Bitsequenz, die durch eine Codierung entstanden ist, kann somit eindeutig decodiert werden.

Aufgabe 4 (Scheduling, Netzplantechnik)

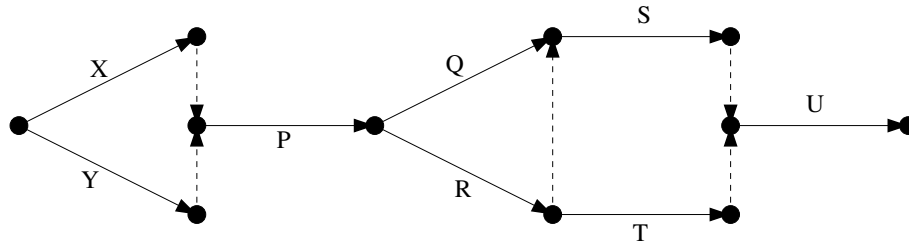
Gegeben sei eine Menge J von Jobs sowie Mengen $P(j)$ für $j \in J$, die angeben, welche Jobs beendet sein müssen, bevor Job j begonnen werden kann.

j	$P(j)$
X	\emptyset
Y	\emptyset
P	$\{X, Y\}$
Q	$\{P\}$
R	$\{P\}$
S	$\{R, Q\}$
T	$\{R\}$
U	$\{T, S\}$

Die Bearbeitung eines Jobs benötigt stets eine Zeiteinheit. Jeder Job benötigt zur Bearbeitung eine Maschine. Es stehen beliebig viele Maschinen zur Verfügung, so dass Jobs parallel ausgeführt werden können.

- (a) Wieviele Zeiteinheiten benötigt man mindestens, um die Jobs korrekt auszuführen? Geben Sie auch an, wieviele Maschinen man für eine möglichst schnelle Ausführung benötigt.
- (b) Was ändert sich an der Berechnung, wenn die Jobs Q, R, T und U statt einer nun zwei Zeiteinheiten benötigen? Geben Sie die kleinstmögliche Gesamtdauer ein.

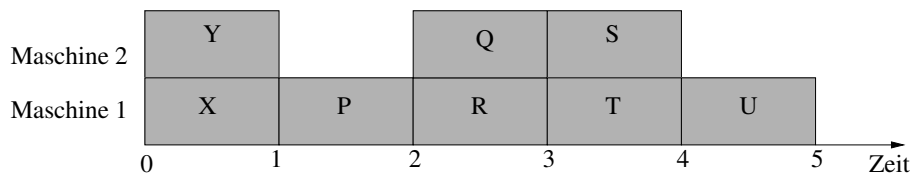
Lösung: Das Problem entspricht der Projektplanung. Wir können die Abhängigkeiten der Jobs in einem Netzplan darstellen:



Man beachte, dass die gestrichelten Kanten sogenannte Dummy-Vorgänge darstellen, die die Dauer 0 haben. Damit hat der längste Weg (kritischer Pfad) in diesem Netzplan die Länge 5. Wir brauchen also fünf Zeiteinheiten zur Ausführung der Jobs.

Man sieht der Darstellung weiterhin an, dass höchstens zwei Jobs parallel ausgeführt werden können. Demnach brauchen wir zwei Maschinen, um die Jobs innerhalb von fünf Zeiteinheiten ausführen zu können. Zusätzliche Maschinen beschleunigen die Ausführung nicht!

Die folgende Grafik zeigt eine optimale Ausführung als sogenanntes *Gantt-Diagramm*, wie es häufig in der Produktionsplanung verwendet wird. Das Diagramm gibt an, wann welcher Job auf welcher Maschine ausgeführt wird.



Wenn die Jobs Q, R, T und U eine Dauer von zwei Zeiteinheiten haben, hat ein kritischer Pfad die Länge 8 (z.B. (X, P, R, T, U)). Das folgende Gantt-Diagramm veranschaulicht eine optimale Ausführung.

