Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. Peter Becker

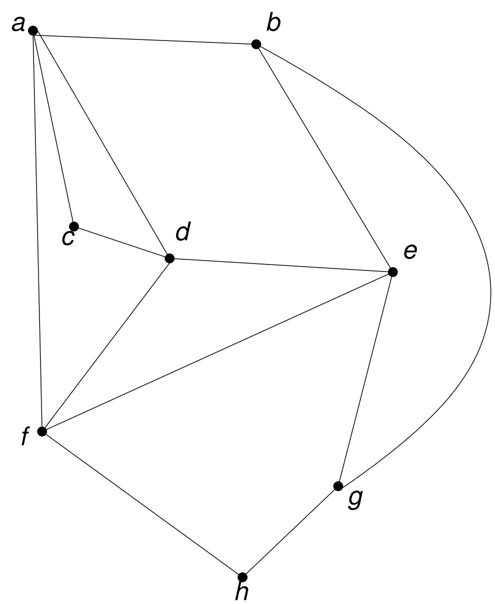
Graphentheorie

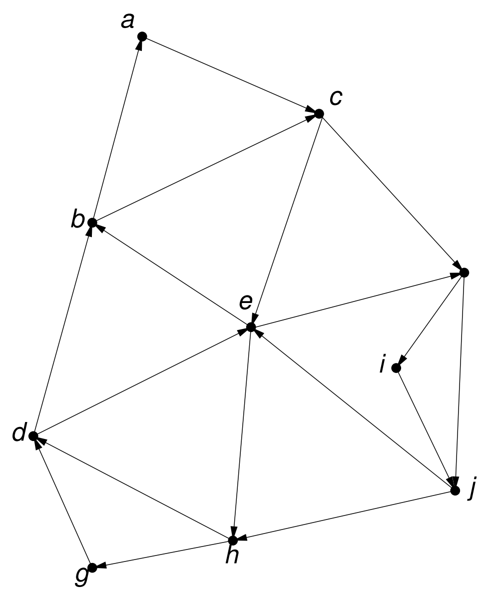
Lösungen zu Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1 (Eulersche Wege und Kreise)

Sind die beiden folgenden Graphen eulersch oder enthalten Sie zumindest einen Eulerschen Weg? Geben Sie einen solchen Kreis (falls eulersch) oder Weg an. Verdeutlichen Sie schrittweise die Konstruktion des Eulerschen Kreises bzw. Weges mit dem Algorithmus von Hierholzer.

Hinweis: Beachten Sie, dass der rechte Graph gerichtet ist. Wie würde Satz 4.3 für gerichtete Graphen lauten?





Lösung: Der linke Graph ist zusammenhängend und hat genau zwei Knoten mit ungeradem Grad (Knoten b und g). Damit ist er nicht eulersch, enthält aber einen eulerschen Weg. Solch ein eulerscher Weg beginnt bzw. endet in den Knoten mit ungeradem Grad, also b und g.

Wenn wir die Kante $\{b, g\}$ entfernen, dann ist der Graph eulersch. Um zu einem eulerschen Weg zu kommen, konstruieren wir mit b als Startknoten einen eulerschen Kreis und fügen anschließend die Kante $\{b, g\}$ dem Kreis hinzu.

Wir starten unsere Konstruktion mit dem Kreis (b, a, d, e, b). Ausgehend von a konstruieren wir den Kreis (a, c, d, f, a) und ausgehend von f den Kreis (f, e, g, h, f). Wenn wir alles zusammenfügen, erhalten wir so den eulerschen Weg $(b, a, c, d, f, e, g, h, f, a, d, e, b, g)$.

Für gerichtete Graphen muss es heißen: Ein gerichteter Graph ist genau dann eulersch, wenn er

- bis auf isolierte Knoten zusammenhängend ist und
- für jeden Knoten $v \in V$ gilt: $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$ (d.h. Eingangsgrad gleich Ausgangsgrad).

Die Bedingung ist für den gegebenen Graphen erfüllt. Die Konstruktion erfolgt analog zum ersten Graphen. Wir beginnen mit dem Kreis $(a, c, f, j, h, g, d, b, a)$ und fügen in diesen Kreis die Kreise (c, e, h, d, e, b, c) sowie (f, i, j, e, f) ein. Insgesamt erhalten wir:

$$(a, c, e, h, d, e, b, c, f, i, j, e, f, j, h, g, d, b, a).$$

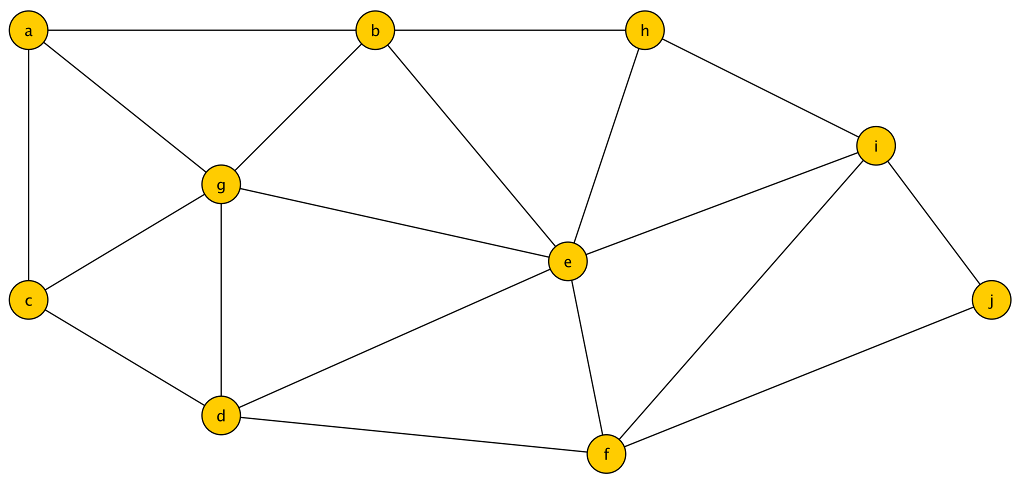
Aufgabe 2 (Zerlegung in kantendisjunkte Wege)

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$, der $2p$ Knoten mit ungeradem Grad aufweist ($p \geq 1$).

(a) Zeigen Sie: Die Menge E der Kanten von G kann in p Wege zerlegt werden, wobei jede Kante aus E in genau einem dieser Wege vorkommt.

Hinweis: Konstruieren Sie aus G durch das Einfügen von zusätzlichen Kanten einen eulerschen Graphen G'.

(b) Finden Sie für den folgende Graphen eine Zerlegung der Kantenmenge E in zwei kantendisjunkte Wege:



Lösung:

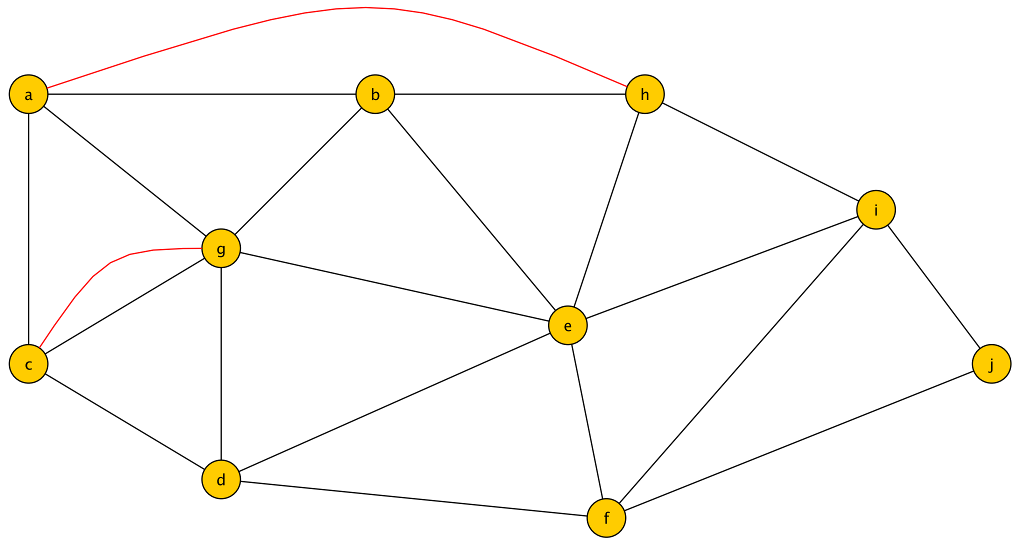
(a) Wir konstruieren aus G einen Graphen G', indem je zwei Knoten mit ungeradem Grad durch eine neue Kante verbunden werden. Da $2p$ Knoten mit ungeradem Grad existieren, brauchen wir dazu p zusätzliche (neue) Kanten.

Die Hinzunahme neuer Kanten hat keinen Einfluss auf den Zusammenhang. Also sind für G' die Voraussetzungen für die Existenz eines Eulerkreises erfüllt, denn durch die zusätzlichen Kanten haben nun alle Knoten in G' einen geraden Grad.

Es sei K ein Eulerkreis von G', also ein Kreis, der jede Kante von G' genau einmal enthält. K enthält dabei auch die p neuen Kanten.

Man beachte, dass in K nie zwei neue Kanten aufeinanderfolgen können, da jeder Knoten höchstens mit einer neuen Kante inzident ist. Wenn wir nun aus dem Kreis K die p neuen Kanten entfernen, zerfällt der Kreis in genau p Wege, die dann jede Kante von G genau einmal enthalten.

(b) Wir wenden die Technik aus dem Beweis von (a) für den in (b) gegebenen Graphen an. Hierzu fügen wir die Kante $\{a, h\}$ und eine zusätzliche Kante zwischen c und g ein. Der so entstandene Graph G' ist eulersch (die neuen Kanten sind rot dargestellt).



Nun bestimmen wir einen Eulerkreis für G'. Ein solcher Eulerkreis ist z.B.

$$(a, b, h, i, j, f, d, c, a, g, b, e, i, f, e, d, g, c, g, e, h, a)$$

Aus diesem Kreis entfernen wir nun wieder die Kante $\{a, h\}$ und die erste Kante zwischen c und g. Dann entstehen die beiden Wege

$$(a, b, h, i, j, f, d, c, a, g, b, e, i, f, e, d, g)$$

und

$$(c, g, e, h).$$

Aufgabe 3 (Hamiltonsche Graphen, Hypercube)

Es sei $H_n = (V_n, E_n)$ der n-dimensionale Hypercube (siehe Aufgabenblatt 1, Aufgabe 1).

(a) Geben Sie jeweils einen Hamiltonkreis für den H_2 und den H_3 an.

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für $n \geq 2$ ist der H_n hamiltonsch.

(c) Implementieren Sie Ihren Beweis von (b): Schreiben Sie ein Java-Programm, das für die Eingabe $n \geq 2$ einen Hamiltonkreis des H_n ausgibt.

Lösung:

(a) $n = 2$: $(00, 10, 11, 01, 00)$ bildet einen hamiltonschen Kreis in H_2.

$n = 3$: $(000, 100, 110, 010, 011, 111, 101, 100, 000)$ bildet einen hamiltonschen Kreis in H_3.

(b) Induktionsanfang: siehe (a)

$n - 1 \longrightarrow n$: Anschaulich gehen wir wie folgt vor: Ein hamiltonscher Kreis des H_{n-1} bildet im H_n einen Kreis auf den mit 0 bzw. mit 1 endenden Knoten. Am letzten bzw. ersten Knoten der Kreise brechen wir diese auf und konstruieren daraus einen hamiltonschen Kreis für alle Knoten (siehe Teil (a)).

Formal: Der H_{n-1} hat 2^{n-1} Knoten, die wir mit $\{v_1, \ldots, v_{2^{n-1}}\}$ bezeichnen. Die Knotenmenge des H_n ist dann die Menge $\{v_1 0, \ldots, v_{2^{n-1}} 0\} + \{v_1 1, \ldots, v_{2^{n-1}} 1\}$.

Gemäß Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, dass der H_{n-1} hamiltonsch ist. O.B.d.A. sei $(v_1, \ldots, v_{2^{n-1}}, v_1)$ ein hamiltonscher Kreis von H_{n-1} (ansonsten benennt man die Knoten entsprechend um). Es folgt, dass der Weg $(v_1 0, \ldots, v_{2^{n-1}} 0)$ alle auf 0 endenden Knoten des H_n enthält. Analog enthält der Weg $(v_{2^{n-1}} 1, \ldots, v_1 1)$ alle auf 1 endenden Knoten des H_n. Da $\{v_{2^{n-1}} 0, v_{2^{n-1}} 1\}$ und $\{v_1 0, v_1 1\}$ Kanten des H_n sind, ist

$$(v_1 0, \ldots, v_{2^{n-1}} 0, v_{2^{n-1}} 1, \ldots, v_1 1, v_1 0)$$

ein hamiltonscher Kreis für den H_n.

(c) siehe Homepage