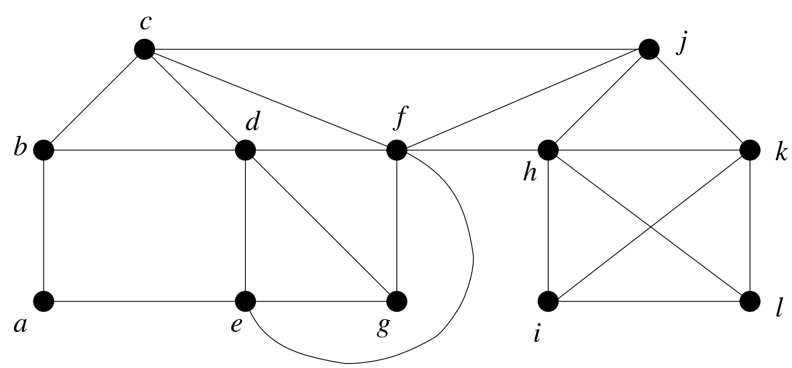
Graphentheorie

Lösungen zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1 (Tiefen- und Breitensuche)

Gegeben sei der folgende Graph:



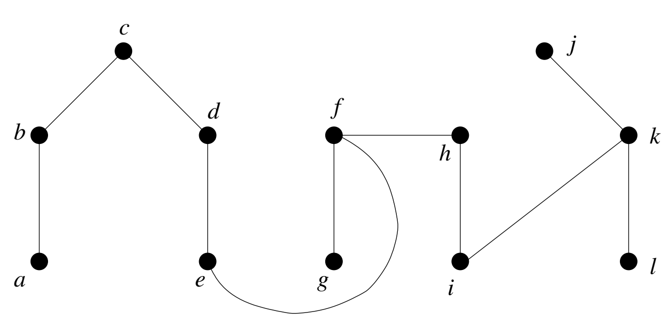
(a) Geben Sie für den obigen Graphen die Tiefensuchnummern $t(v)$ sowie die Menge B der Baumkanten an, die sich bei der Tiefensuche ergeben. Starten Sie die Suche bei Knoten a. Die Adjazenzlisten der Knoten seien alphabetisch sortiert.

(b) Geben Sie für den obigen Graphen die Breitensuchnummern $b(v)$ sowie die Menge B der Baumkanten an, die sich bei der Breitensuche ergeben. Starten Sie die Suche bei Knoten a. Die Adjazenzlisten der Knoten seien alphabetisch sortiert.

Lösung:

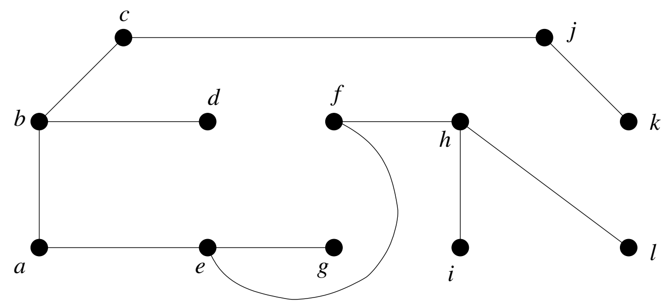
(a)

v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
$t(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	10	12



(b)

v	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
$b(v)$	1	2	4	5	3	6	7	9	11	8	10	12



Aufgabe 2 (Anwendung Tiefensuche)

Auf der Homepage der Vorlesung finden Sie Beispielprogramme für die Tiefen- und die Breitensuche. Passen Sie das Beispielprogramm für die Tiefensuche so an, dass Sie damit die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines Graphen berechnen können.

Als Testdaten finden Sie auf der Homepage die Adjazenzliste eines Graphen mit 500 Knoten ($V = \{0, \ldots, 499\}$). Wie viele Zusammenhangskomponenten hat dieser Graph?

Lösung: Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten beträgt 18. Programm siehe Homepage.

Aufgabe 3 (Anwendung der Breitensuche)

Zur Erinnerung: Die *Länge* eines Kantenzugs ist definiert als die Anzahl der Kanten des Kantenzugs.

Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Wir definieren als *Abstand* $d(v, w)$ zweier Knoten $v, w \in V$ von G das Minimum der Längen aller Kantenzüge von v nach w. Der *Durchmesser* $diam(G)$ von G ist der größte Abstand zwischen zwei Knoten, also $diam(G) = \max\limits_{v,w \in V} d(v, w)$.

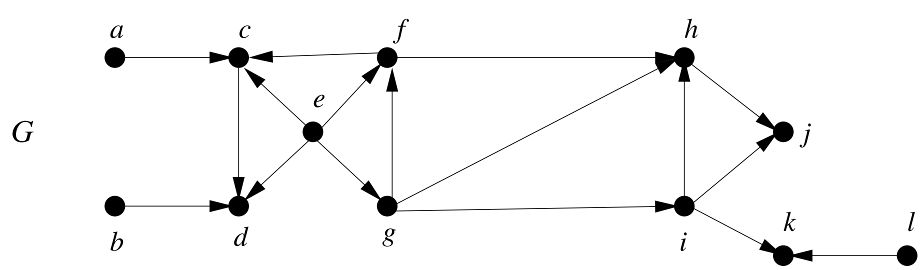
Passen Sie das Beispielprogramm zur Breitensuche so an, dass Sie damit den Durchmesser eines Graphen berechnen können.

Auf der Homepage finden Sie einen Link zu einem zusammenhängenden Beispielgraphen mit 150 Knoten. Berechnen Sie für diesen Graphen den Durchmesser.

Lösung: Der Durchmesser des Graphen beträgt 25. Programm siehe Homepage.

Aufgabe 4 (Topologisches Sortieren)

Ermitteln Sie für den folgenden gerichteten Graphen $G = (V, A)$ eine topologische Sortierung der Knoten.



Lösung: Wir wenden Algorithmus 3.16 an, um eine topologische Ordnung der Knoten zu bestimmen.

k	v	Q
0		$\{a,b,e,l\}$
1	a	$\{b,e,l\}$
2	b	$\{e,l\}$
3	e	$\{g,l\}$
4	g	$\{f,i,l\}$
5	f	$\{c,i,l\}$
6	c	$\{d,i,l\}$
7	d	$\{i,l\}$
8	i	$\{h,l\}$
9	h	$\{j,l\}$
10	j	$\{l\}$
11	l	$\{k\}$
12	k	$\{\}$

$(a,b,e,g,f,c,d,i,h,j,l,k)$ ist damit eine von vielen möglichen topologischen Ordnungen.

Aufgabe 5 (Anzahl topologischer Sortierungen)

Die DAGs $G_n = (V_n, A_n)$ sind für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} V_n &= \{1,\ldots,n\} \times \{-1,1\} \\ A_n &= \{((i,j),(i-1,j)) \mid i = 2,\ldots,n \text{ und } j = -1,1\} \cup \\ &\quad \{((i,(-1)^i),(i-1,(-1)^{i-1})) \mid i = 2,\ldots,n\} \end{aligned}$$

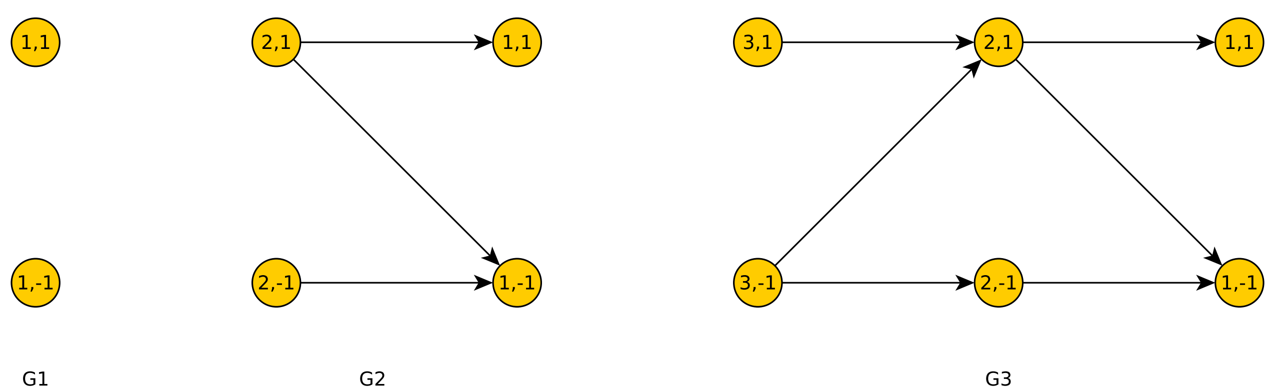
(a) Zeichnen Sie Diagramme für die DAGs G_1 bis G_3.

(b) Es sei S_n die Anzahl an topologischen Sortierungen des G_n. Zeigen Sie: $S_1 = 2, S_2 = 5$ und $S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2}$.

(c) Leiten Sie eine Formel für S_n her.

Lösung:

(a)



1.0

(b) $n = 1$: Für den G_1 können die beiden Knoten in beliebiger Reihenfolge angeordnet werden. Daher gibt es zwei mögliche topologische Sortierungen: $(1,1),(1,-1)$ und $(1,-1),(1,1)$.

$n = 2$: Es gibt zwei Knoten mit Eingangsgrad 0: $(2,-1)$ und $(2,1)$.

  - Wenn wir als erstes $(2,-1)$ wählen, muss $(2,1)$ als zweites gewählt werden.
    Damit sind insgesamt zwei topologische Sortierungen möglich: $(2,-1),(2,1)(1,-1),(1,1)$ und $(2,-1),(2,1)(1,1),(1,-1)$.
  - Wenn wir als erstes $(2,1)$ wählen, können wir danach $(2,-1)$ oder $(1,1)$ wählen.
    * Für $(2,-1)$ als zweites Element entstehen die topologischen Sortierungen $(2,1),(2,-1),(1,-1),(1,1)$ und $(2,1),(2,-1),(1,1),(1,-1)$.
    * Wählen wir als zweites Element $(1,1)$, dann muss $(2,-1)$ das dritte und $(1,-1)$ das vierte Element sein. Es entsteht also $(2,1),(1,1),(2,-1),(1,-1)$.

Demnach gibt es insgesamt fünf topologische Sortierungen.

$n-2, n-1 \to n$: O.B.d.A. sei n gerade, der ungerade Fall ist symmetrisch dazu. Wir gehen analog zum Fall $n=2$ vor.

Es gibt zwei Knoten mit Eingangsgrad 0: $(n,-1)$ und $(n,1)$.

  - Wenn wir als erstes $(n,-1)$ wählen, muss $(n,1)$ als zweites gewählt werden. Jetzt bleibt der G_{n-1} übrig, für den es S_{n-1} viele topologische Sortierungen gibt.
  - Wenn wir als erstes $(n,1)$ wählen, können wir danach $(n,-1)$ oder $(n-1,1)$ wählen.
    * Für $(n,-1)$ als zweites Element entsteht wieder der G_{n-1} mit S_{n-1} topologischen Sortierungen.
    * Wählen wir $(n-1,1)$ als zweites Element, müssen wir anschließend $(n,-1)$ und danach $(n-1,-1)$ wählen. Es entsteht der G_{n-2} mit S_{n-2} vielen topologischen Sortierungen.

Insgesamt gibt es also $S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2}$ viele topologische Sortierungen für den G_n.

(c)

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda - 1 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Also

$$S_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n.$$

Jetzt müssen wir aus den Anfangswerten noch α und β bestimmen. Wenn wir die Folge durch $S_0 = 1$ künstlich erweitern, gilt auch für $S_2 = 2S_1 + S_0$.

Anmerkungen:

  - Wie kommt man darauf? Man bildet aus $S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2}$ die Gleichung
    $$S_{n-2} = S_n - 2S_{n-1}$$
    und nutzt für $n=2$ die gegebenen Zahlen $S_2 = 5$ und $S_1 = 1$. Daraus folgt $S_0 = 5 - 2 \cdot 2 = 1$.
  - Dieser Trick macht die Lösung des Anfangswertproblems nur einfacher. Ohne Anwendung dieses Tricks kommt man zur gleichen Lösung, nur wäre dann das folgende lineare Gleichungssystem etwas komplizierter.

Damit entsteht das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 1 \\ (1+\sqrt{2})\alpha & + & (1-\sqrt{2})\beta & = & 2. \end{array}$$

Setzen wir $\beta = 1 - \alpha$ in die zweite Gleichung ein, entsteht

$$\begin{aligned} & (1+\sqrt{2})\alpha + (1-\sqrt{2})(1-\alpha) = 2 \\ \Rightarrow\ & 2\sqrt{2}\alpha = 1 + \sqrt{2} \\ \Rightarrow\ & \alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ \Rightarrow\ & \beta = -\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Also:

$$S_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}\right).$$