Graphentheorie

Lösungen zu Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1 (Cliquen)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie: Für die Cliquenzahl $\omega(G)$ gilt

$$\omega(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2|E|} \right\rfloor.$$

Lösung: $\omega(G)$ bezeichnet die Knotenzahl einer größten Clique in G.

Eine Clique ist ein vollständiger Untergraph. Demnach enthält eine größte Clique

$$\binom{\omega(G)}{2} = \frac{\omega(G)(\omega(G)-1)}{2}$$

Kanten (vgl. Anzahl Kanten in einem vollständigen Graph).

Jede Kante einer größten Clique ist natürlich auch in E enthalten. Damit folgt:

$$|E| \geq \frac{\omega(G)(\omega(G)-1)}{2}.$$

Umformung dieser Ungleichung ergibt

$$\omega^2(G) - \omega(G) - 2|E| \leq 0.$$

Wir betrachten die Parabel $\omega^2(G) - \omega(G) - 2|E|$ mit $\omega(G)$ als Variable. Die Parabel ist nach oben geöffnet, da der Koeffizient vor dem quadratischen Term positiv ist. Die Nullstellen der Parabel definieren dann ein Intervall für $\omega(G)$, für das die Ungleichung $\omega^2(G) - \omega(G) - 2|E| \leq 0$ erfüllt wird.

Die Nullstellen können wir mit einer der üblichen Formeln zur Lösung einer quadratischen Gleichung ermitteln (Mitternachtsformel). Interessant ist hier nur die rechte (größere) Nullstelle. Sie lautet

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2|E|}.$$

Damit folgt

$$\omega(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2|E|}.$$

Da $\omega(G)$ immer ganzzahlig ist, können wir die Ungleichung auf der rechten Seite noch verschärfen zu

$$\omega(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2|E|} \right\rfloor.$$

Aufgabe 2 (Zusammenhang, Komplementgraph)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie:

$$G \text{ ist nicht zusammenhängend} \Longrightarrow \overline{G} \text{ ist zusammenhängend.}$$

Lösung: Sei $G = (V, E)$ nicht zusammenhängend. Dann existieren in G mindestens zwei Zusammenhangskomponenten (ZHKs). Wir betrachten nun zwei beliebige Knoten $v, w \in V$. Wir müssen zeigen, dass in $\overline{G}$ die Knoten v und w über einen Weg verbindbar sind, denn genau dann ist $\overline{G}$ zusammenhängend (nach Definition für "zusammenhängend").

Hierfür führen wir eine Fallunterscheidung durch:

1. v und w sind nicht adjazent in G, d. h. $\{v, w\}$ ist keine Kante von G.

   Es folgt nach Definition für $\overline{G}$, dass $\{v, w\}$ eine Kante von $\overline{G}$ ist. Damit sind die Knoten v und w in $\overline{G}$ verbindbar.

2. v und w sind adjazent, d. h. $\{v, w\} \in E$ ist eine Kante in G.

   Dann liegen v und w in der gleichen ZHK, denn sie sind ja über eine Kante verbunden.

   Weil G nicht zusammenhängend ist, gibt es mindestens eine weitere ZHK. Diese enthalte den Knoten x.

   Da x in einer anderen ZHK als v und w liegt, sind $\{v, x\}$ und $\{w, x\}$ keine Kanten von G, somit aber von $\overline{G}$. Also ist (v, x, w) ein Weg in $\overline{G}$ und somit sind v und w in $\overline{G}$ verbindbar.

Somit haben wir gezeigt, dass zwei beliebige Knoten aus V in $\overline{G}$ verbindbar sind. Also ist $\overline{G}$ zusammenhängend.

Aufgabe 3 (Bäume)

Zeigen Sie, dass für einen Graphen $G = (V, E)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) G ist ein Baum.

(2) Je zwei Knoten von G sind durch genau einen Weg verbindbar.

(3) G ist zusammenhängend, aber für jede Kante $e \in E$ ist $G' = (V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.

Hinweis: Verwenden Sie einen Ringschluss.

Lösung: Wir beweisen die Äquivalenz mit einem Ringschluss.

(1) $\Rightarrow$ (2): $G = (V, E)$ ist ein Baum, d. h. G ist zusammenhängend und kreisfrei. Wir nehmen an, dass es zwei Knoten v und w gibt, die nicht durch genau einen Weg verbunden sind. Da G zusammenhängend ist, existiert mindestens ein Weg von v nach w. Also muss es gemäß unserer Annahme mindestens zwei Wege von v nach w geben. Aus diesen zwei Wegen könnte aber ein Kreis konstruiert werden. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass G kreisfrei ist.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $e = \{v, w\}$ eine beliebige Kante von G. Dann bildet diese Kante nach Voraussetzung den einzigen Weg von v nach w. Also sind v und w nicht mehr verbindbar, wenn wir e entfernen, d. h. G ist nicht mehr zusammenhängend.

(3) $\Rightarrow$ (1): Nach Voraussetzung ist G zusammenhängend. Wir müssen also nur noch die Kreisfreiheit nachweisen.

Annahme: G enthält einen Kreis. Sei e eine Kante dieses Kreises. Die Wegnahme von e aus G hätte dann keinen Einfluss auf den Zusammenhang, da in einem Kreis stets zwei Wege zwischen zwei Knoten existieren, durch die Wegnahme von e aber nur ein Weg betroffen ist. Also bleibt G zusammenhängend, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Aufgabe 4 (Bäume)

Zeigen Sie:

(a) Ein Baum mit n Knoten hat genau $n-1$ Kanten.

(b) Jeder Baum mit mindestens zwei Knoten hat mindestens zwei Blätter.

Hinweis: Vollständige Induktion über die Anzahl der Knoten.

Lösung:

(a) Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für $n = 1$.

Induktionsschritt: Es sei $G = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n+1$ Knoten. Nach (b) hat G mindestens ein Blatt v. Es sei G' der Graph der entsteht, wenn wir aus G das Blatt v und die eine zugehörige inzidente Kante entfernen. Nach Induktionsvoraussetzung hat dann G' genau $n-1$ Kanten. Daraus folgt, dass G genau n Kanten hat.

(b) Induktionsanfang: Für $|V| = 2$ gibt es nur einen Baum. Jeder der beiden Knoten hat den Grad 1, ist also ein Blatt.

Induktionsschritt: Es sei $G = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n+1$ Knoten. Wenn wir aus G eine beliebige Kante e entfernen, entstehen zwei Bäume G_1 und G_2, die jeweils höchstens n Knoten haben. Es sei n_i die Anzahl der Knoten für Baum G_i ($i = 1, 2$). Wir können zwei Fälle unterscheiden:

(1) G_1 und G_2 enthalten mindestens zwei Knoten.

Insgesamt gibt es dann mindestens vier Knoten mit Grad 1, da gemäß Induktionsvoraussetzung jeder der beide Bäume mindestens zwei Knoten mit Grad 1 hat. Wenn wir die Kante e jetzt wieder einfügen, kann sie höchstens zwei Knoten mit Grad 1 verbinden, es verbleiben also mindestens zwei weitere.

(2) Entweder G_1 oder G_2 enthält nur einen Knoten.

O.B.d.A. sei G_1 der Baum mit nur einem Knoten. G_2 enthält dann nach Induktionsvoraussetzung mindestens zwei Knoten mit Grad 1.

Wenn wir die Kante e jetzt wieder einfügen, ist hierdurch höchstens ein Knoten aus G_2 mit Grad 1 betroffen. Andererseits entsteht durch den Knoten in G_1 ein weiterer Knoten mit Grad 1. Somit hat G wiederum mindestens zwei Knoten mit Grad 1.