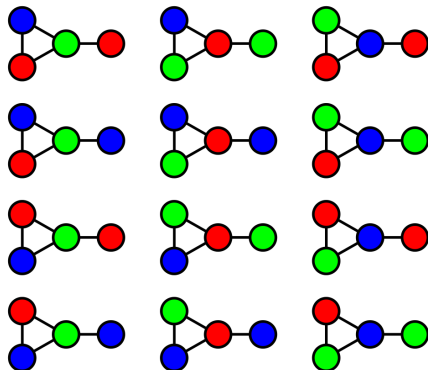


Kapitel 7

Planare Graphen und Färbungen



Inhalt

7 Planare Graphen und Färbungen

- Planarität
- Färbungen

Jordankurve

Zentrale Frage bei der **Planarität**: Welche Graphen lassen sich **zeichnen, ohne dass sich die Kanten schneiden**?

Die Kanten stellen wir dabei als **Jordankurve** dar.

Definition 7.1

Eine **Jordankurve** des \mathbb{R}^n ist eine Menge der Form $\{f(t) \mid t \in [0, 1]\}$, wobei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive stetige Abbildung ist.

Bemerkung: Jordankurven sind stetige und schnittpunktfreie Kurven mit Anfangs- und Endpunkt.

Jordankurven im \mathbb{R}^2 (1)

Beispiel 7.2

Im \mathbb{R}^2 ist eine Funktion f zur Darstellung einer Kurve gegeben durch

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

mit $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Die durch f definierte Kurve ist **stetig**, wenn die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ stetig sind.

Jordankurven im \mathbb{R}^2 (1)

Beispiel 7.3

Eine **Strecke** von einem Punkt (x_1, y_1) zu einem Punkt (x_2, y_2) ist gegeben durch

$$f(t) = \begin{pmatrix} x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y_1 + t(y_2 - y_1) \end{pmatrix}.$$

Der **Einheitskreis** entspricht der Kurve mit

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}.$$

Einbettbarkeit

Definition 7.4

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **einbettbar** in den \mathbb{R}^n gdw.

- seine **Knoten als paarweise verschiedene Punkte des \mathbb{R}^n** und
- seine **Kanten als Jordankurven des \mathbb{R}^n** dargestellt werden können,
- wobei die Jordankurven als Anfangs- bzw. Endpunkt die Punkte der zugeordneten Knoten haben und
- sich die **Kurven paarweise nicht schneiden** (außer in den Knotenpunkten für die Anfangs- und Endpunkte).

Planarität

Definition 7.5

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **planar** gdw. er in den \mathbb{R}^2 einbettbar ist.

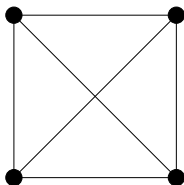
Das Diagramm einer solchen Einbettung heißt **ebenes Diagramm**.

Jedes Ebene Diagramm eines Graphen unterteilt die Ebene in zusammenhängende Gebiete, die man **Flächen** nennt.

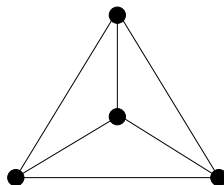
Es existiert genau ein solches Gebiet, das unbeschränkt ist. Es heißt **Außengebiet**.

Diagramme für den K_4

K_4 :



nicht eben



eben

Weitere Beispiele für planare Graphen:

- **Hypercube** für $n = 2, 3$
- **Dodekaedergraph**

Einfache Aussagen zur Planarität

Lemma 7.6

Der K_5 ist nicht planar.

Beweis.

Nach dem Zeichnen des Kreises $(1, 2, 3, 4, 5, 1)$ haben wir genau zwei Flächen: das Außengebiet und die Fläche, die durch den Kreis eingeschlossen wird.

Es fehlen noch die folgenden fünf Kanten:

$\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$. Diese können wir **entweder in die Kreisfläche oder das Außengebiet** legen.

Bei **jeder dreielementigen Teilmenge** der fehlenden fünf Kanten **kommt es zu einer Kreuzung**.

Fortsetzung Beweis.

Damit können kreuzungsfrei höchstens zwei Kanten in die Kreisfläche und höchstens zwei Kanten in das Außengebiet gelegt werden.

In der Summe können also höchstens neun Kanten kreuzungsfrei gezeichnet werden, der K_5 hat aber zehn Kanten.

Lemma 7.7

- *Jeder Untergraph eines planaren Graphen ist wieder planar.*
- *Jeder Graph, der einen nicht planaren Untergraphen enthält, ist selbst nicht planar.*

Bipartite Graphen

Definition 7.8

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **bipartit** gdw. V in zwei disjunkte Teilmengen S und T zerlegt werden kann (d.h. $V = S + T$), so dass für alle Kanten $e = \{v, w\} \in E$ gilt: $v \in S, w \in T$.

Ein bipartiter Graph, bei dem jeder Knoten aus S mit jedem Knoten aus T adjazent ist, heißt **vollständig bipartit**.

Mit $K_{n,m}$ wird der vollständige bipartite Graph mit $|S| = n$ und $|T| = m$ bezeichnet.

Lemma 7.9

Der $K_{3,3}$ ist nicht planar.

Beweis.

Analog zu Lemma 7.6.


Eulersche Polyederformel

Satz 7.10

Gegeben sei ein planarer zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit $n := |V|$ und $m := |E|$ sowie ein ebenes Diagramm von G mit f Flächen. Dann gilt

$$n + f = m + 2$$

Beweis.

Beweis durch Induktion über m . Für $m = 0$ folgt $n = f = 1$. Damit ist die Formel richtig. Für den Induktionsschritt Fallunterscheidung ob G Baum oder nicht. Tafel .

Folgerung 7.11

Für ein ebenes Diagramm eines planaren Graphen $G = (V, E)$ mit k Zusammenhangskomponenten gilt

$$n + f = m + k + 1$$

Knoten- und Kantenanzahlen in planaren Graphen

Satz 7.12

*Es sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit $n := |V|$ und $m := |E| \geq 2$.
Dann gilt:*

$$m \leq 3n - 6.$$

Wenn G keinen Kreis der Länge 3 enthält, dann gilt:

$$m \leq 2n - 4.$$

Beweis.

Gegeben sei ein ebenes Diagramm eines zusammenhängenden Graphen mit n Knoten, $m \geq 3$ Kanten e_1, \dots, e_m und f Flächen F_1, \dots, F_f .

Die $m \times f$ -Matrix $A = (a_{ij})$ sei definiert durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } e_i \text{ Teil des Randes von } F_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Jede Kante gehört zum Rand von höchstens zwei Flächen. Also enthält jede Zeile der Matrix höchstens zwei Einsen, d.h. die Summe der Zeilensummen ist $\leq 2m$.
- Jede Fläche wird von mindestens drei Kanten berandet. Somit gibt es insgesamt mindestens $3f$ Einsen (Summe der Spaltensummen).

Fortsetzung Beweis.

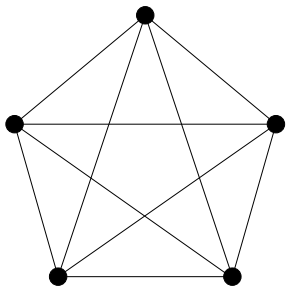
- Es folgt $3f \leq 2m$. Polyederformel: $f = m - n + 2$
- Damit folgt $m \leq 3n - 6$.
- Die Formel gilt auch für $m = 2$.
- Für nicht zusammenhängende Graphen: Formel gilt in jeder ZHK.

Bemerkung:

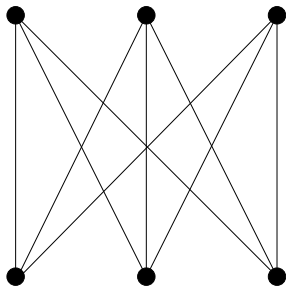
- Satz 7.12 liefert eine andere Begründung dafür, dass der K_5 und der $K_{3,3}$ nicht planar sind.
- Für diese Graphen ist die 1. bzw. 2. Ungleichung in Satz 7.12 nicht erfüllt.

Die kleinsten nicht planaren Graphen

K5



K3,3



Bemerkung: Diese beiden Graphen sind in gewissem Sinne die “kleinsten” nicht planaren Graphen.

Folgerung 7.13

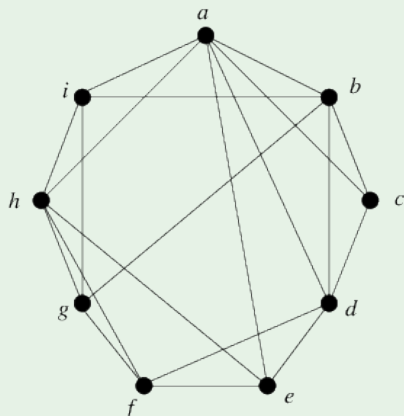
Für jeden planaren Graph $G = (V, E)$ existiert ein $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$.

Testen auf Planarität

- effizient, aber komplex
- hier: Beispiel für eine heuristische Methode für **hamiltonsche Graphen**

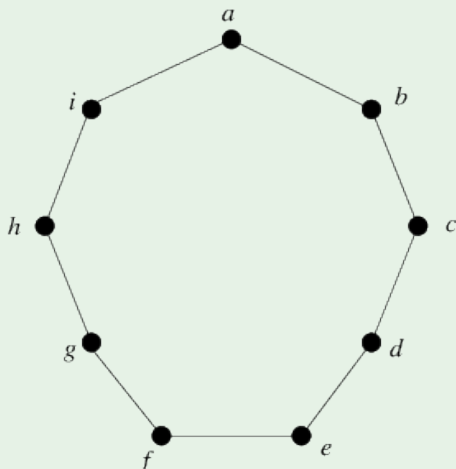
Beispiel 7.14

Ist dieser Graph planar?



Fortsetzung Beispiel.

Der Graph enthält einen hamiltonschen Kreis. Dieser muss auf alle Fälle kreuzungsfrei gezeichnet werden, also fangen wir damit an.



Fortsetzung Beispiel.

Die fehlenden Kanten können wir in die Kreisfläche oder das Außengebiet legen. Wir listen alle fehlenden Kanten auf:

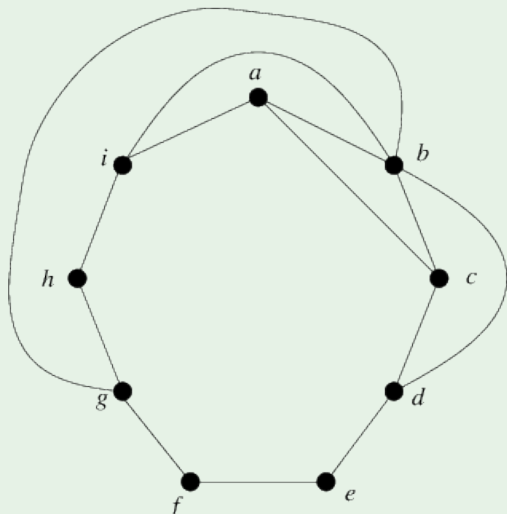
$$\begin{array}{l} \{a, c\} \quad \{b, d\} \quad \{d, f\} \quad \{e, h\} \quad \{f, h\} \quad \{g, i\} \\ \{a, d\} \quad \{b, g\} \\ \{a, e\} \quad \{b, i\} \\ \{a, h\} \end{array}$$

Es sei

- A die Menge der noch fehlenden Kanten, die wir in die Kreisfläche legen und
- B sei die Menge der fehlenden Kanten, die wir ins Außengebiet legen.

Fortsetzung Beispiel.

Wir nehmen die Kante $\{a, c\}$ in die Menge A auf. Diese Kante steht in Konflikt mit den Kanten $\{b, d\}$, $\{b, g\}$, $\{b, i\}$, also nehmen wir diese in B auf. Diese Kanten sind untereinander konfliktfrei.



Jetzt noch fehlende Kanten:

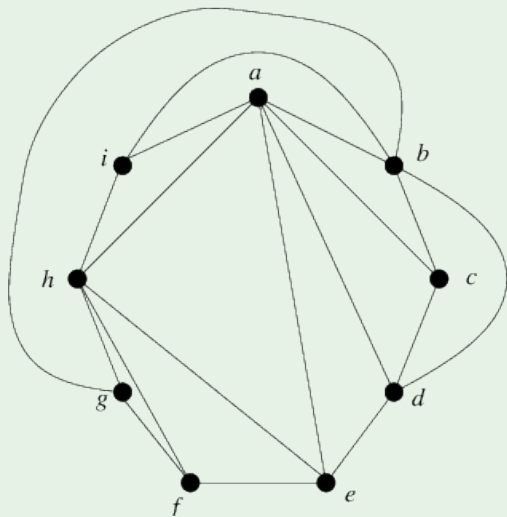
$\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{a, h\}$, $\{d, f\}$, $\{e, h\}$, $\{f, h\}$, $\{g, i\}$

Fortsetzung Beispiel.

Von den Kanten in B steht $\{b, g\}$ in Konflikt mit den Kanten $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{e, h\}$, $\{f, h\}$. Also können wir diese Kanten nur in die Menge A einfügen.

Weiterhin steht $\{b, i\}$ in Konflikt mit $\{a, h\}$, also muss auch diese Kante nach A . Alle jetzt in A befindlichen Kanten sind konfliktfrei.

Jetzt noch fehlende Kanten: $\{d, f\}$, $\{g, i\}$

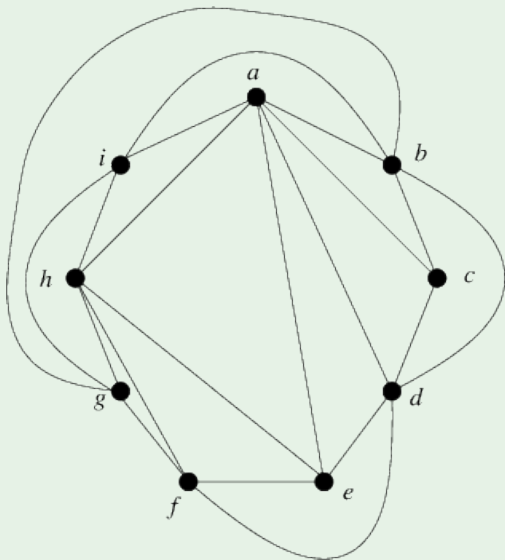


Fortsetzung Beispiel.

Von den Kanten in A steht $\{a, e\}$ in Konflikt mit $\{d, f\}$. Also kommt $\{d, f\}$ nach B .

Weiterhin steht $\{e, h\}$ in Konflikt mit $\{g, i\}$, also nehmen wir auch $\{g, i\}$ in B auf. Alle Kanten in B sind untereinander konfliktfrei.

Damit ist der Graph **planar**.

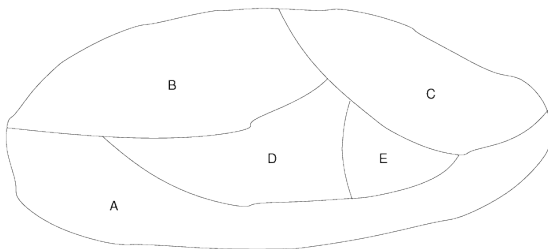


Vier-Farben-Vermutung (1)

Landkarten möchte man so färben, dass **keine benachbarten Länder die gleiche Farbe erhalten**.

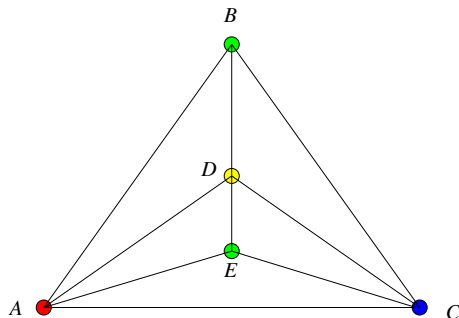
Wie viele Farben braucht man zur Färbung einer Landkarte?

Vier-Farben-Vermutung: Jede Landkarte kann so mit **vier Farben** gefärbt werden, dass **benachbarte Länder stets verschiedene Farben haben**.



Vier-Farben-Vermutung (2)

- Eine Landkarte kann als planarer Graph dargestellt werden.
- Hierzu werden die **Länder durch Knoten repräsentiert** und **benachbarte Länder werden durch eine Kante miteinander verbunden**.
- Die **Knoten** zu einer Kante müssen dann **verschiedene Farben** haben.



Färbungen (1)

Definition 7.15

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **k -färbbar** gdw.

$$\exists f : V \rightarrow \{1, \dots, k\} \text{ mit } \{v, w\} \in E \Rightarrow f(v) \neq f(w),$$

d. h. den Knoten können k Farben zugeordnet werden, so dass adjazente Knoten stets verschiedene Farben haben.

Die Zahl

$$\chi(G) := \min\{k \mid G \text{ ist } k \text{ färbbar}\}$$

heißt **chromatische Zahl** von G .

Färbungen (2)

Bemerkungen:

- Die chromatische Zahl $\chi(G)$ ist **die kleinste Anzahl an Farben**, die für eine Färbung von G benötigt werden.
- Besteht G aus den ZHKs G_1, \dots, G_n , dann gilt

$$\chi(G) = \max_{i=1}^n \chi(G_i).$$

- Für eine anschauliche Präsentation verwende ich üblicherweise Farben statt natürlicher Zahlen.

Einfache Aussagen zu Färbungen (1)

Lemma 7.16

Ein Graph G ist genau dann 1-färbbar, wenn G nur aus isolierten Knoten besteht.

Lemma 7.17

Bäume sind 2-färbbar.

Lemma 7.18

Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann 2-färbbar, wenn G bipartit ist.

Lemma 7.19

Es sei G' ein Untergraph von G . Dann gilt

$$\chi(G') \leq \chi(G).$$

Einfache Aussagen zu Färbungen (2)

Das Haus vom Nikolaus ist 4-färbbar. Ist es auch 3-färbbar?

Lemma 7.20

Es sei G ein Graph. Dann gilt

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

Damit kann das Haus vom Nikolaus nicht 3-färbbar sein.

Der Fünf-Farben-Satz

Satz 7.21

Jeder planare Graph $G = (V, E)$ ist 5-färbbar.

Beweis.

Es sei $n := |V|$. Beweis erfolgt mit Induktion über n .

Für $n \leq 5$ ist der Satz richtig.

$n \rightarrow n + 1$: G sei ein planarer Graph mit $n + 1$ Knoten. Nach Korollar 7.13 hat G einen Knoten v mit $\deg(v) \leq 5$.

Gilt $\deg(v) < 5$: fertig.

Gilt $\deg(v) = 5$ und die fünf adjazenten Knoten benutzen weniger als fünf Farben: fertig.

Rest: Tafel .

Der Vier-Farben-Satz

Satz 7.22

Jeder planare Graph $G = (V, E)$ ist 4-färbbar.

- Damit ist die Vier-Farben-Vermutung wahr.
- Beweis 1976 durch [Kenneth Appel](#) und [Wolfgang Haken](#).
- Der Beweis von Appel und Haken enthielt eine so hohe Zahl von Fallunterscheidungen, dass diese nicht manuell sondern nur mit Hilfe eines Computers überprüft werden konnten.
- Zunächst Akzeptanzprobleme, der Satz gilt heute aber (auch durch weitere Forschung) als bewiesen.
- Erstes bedeutendes mathematisches Theorem, das mit Hilfe von Computern bewiesen wurde.

Chromatisches Polynom

Definition 7.23

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die Anzahl der Möglichkeiten G mit x Farben zu färben wird mit $f(G, x)$ bezeichnet. Hierbei müssen nicht alle x Farben verwendet werden.

Die Funktion $f(G, x)$ heißt **chromatisches Polynom** von G .

Beispiel 7.24

Der Graph



kann auf 12 verschiedene Arten mit 3 Farben gefärbt werden.

Sein chromatische Polynom lautet

$$f(G, x) = x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x.$$

Chromatische Polynome verschiedener Graphen

Für den vollständigen Graphen K_n gilt:

$$f(K_n, x) = x(x-1) \cdots (x-n+1).$$

Für das Komplement (n isolierte Knoten) gilt: $f(\bar{K}_n, x) = x^n$.

Es sei G ein Baum mit n Knoten. Dann gilt

$$f(G, x) = x(x-1)^{n-1}.$$

Besteht G aus den ZHKs G_1, \dots, G_n , dann gilt


$$f(G, x) = \prod_{i=1}^n f(G_i, x).$$

Berechnung des chromatischen Polynoms

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $a, b \in V$ seien nicht adjazent. Dann sei

$$G_{\{a,b\}} = (V, E \cup \{a, b\})$$

Weiterhin bezeichne $G_{a=b}$ den Graphen, der entsteht, wenn in G die Knoten a und b entfernt und durch einen neuen Knoten c ersetzt werden. Dabei ist $\{v, c\}$ für $v \in V \setminus \{a, b\}$ genau dann eine Kante von $G_{a=b}$, wenn $\{v, a\}$ oder $\{v, b\}$ eine Kante von G war.

Beispiel zu $G_{\{a,b\}}$ und $G_{a=b}$: Tafel .

Satz 7.25

Sind a und b zwei nicht adjazente Knoten eines Graphen G , dann gilt

$$f(G, x) = f(G_{\{a,b\}}, x) + f(G_{a=b}, x)$$

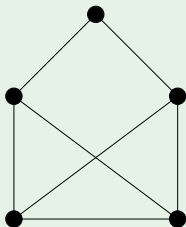

Beweis.

- Es seien a und b zwei nicht adjazente Knoten eines Graphen G .
- a und b sind entweder verschieden oder gleich gefärbt.
- Die Anzahl der Färbungen, bei denen a und b verschiedene Farben haben, ist identisch mit der Anzahl der Färbungen von $G_{\{a,b\}}$.
- Die Anzahl der Färbungen, bei denen a und b die gleiche Farbe haben, ist identisch mit der Anzahl der Färbungen von $G_{a=b}$.
- Die Anzahl aller Färbungen ergibt sich somit aus der Summe.

Bemerkung: Satz 7.25 gibt einem die Möglichkeit, das chromatische Polynom rekursiv zu berechnen.

Beispiel 7.26

Der Graph

hat das chromatische Polynom (Tafel )

$$\begin{aligned} f(G, x) &= f(K_5, x) + 3f(K_4, x) + 2f(K_3, x) \\ &= x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 23x^2 + 10x. \end{aligned}$$

Wegen $f(G, 2) = 0$ und $f(G, 3) = 12$ folgt $\chi(G) = 3$.

Anwendungen

Stundenplanprobleme:

- Die Vorlesungen werden als Knoten betrachtet.
- Zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, wenn die Vorlesungen nicht gleichzeitig stattfinden sollen (gleicher Professor, gleiche Studenten, etc.).
- Die Farben entsprechen möglichen Vorlesungszeiten. Eine Färbung des Graphen stellt dann einen möglichen Stundenplan dar.
- Das chromatische Polynom gibt an, wieviele mögliche Stundenpläne es gibt, die chromatische Zahl die Anzahl der benötigten Zeitslots.

Beispiel 7.27

Wir wollen ein Sportfest planen, für das sich Sportler in unterschiedlichen Disziplinen angemeldet haben.

Disziplin	Klaus	Heinz	Jupp	Peter	Toni	Ralf	Karl
100 Meter Lauf	x		x		x		x
Weitsprung		x		x		x	
Kugelstoßen	x	x					x
Speerwerfen			x			x	
5000 Meter Lauf					x	x	
Hochsprung	x	x		x	x		x

Für jede Disziplin wird genau ein Zeitabschnitt benötigt. Die Sportler sollen an allen Disziplinen, zu denen sie sich angemeldet haben, auch teilnehmen können.

Fortsetzung Beispiel.

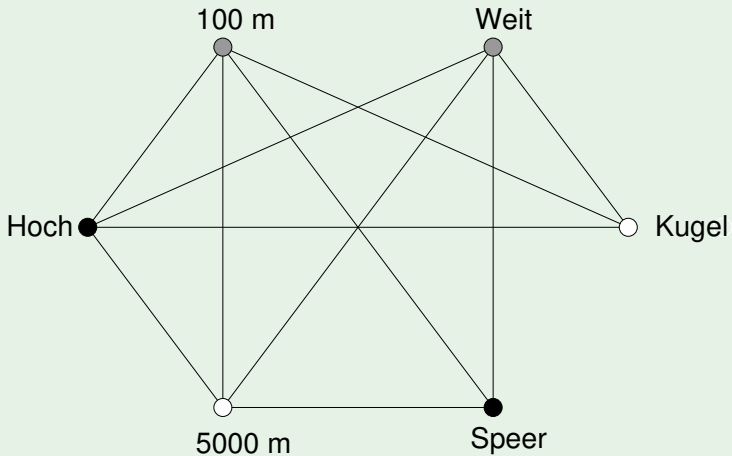
Wieviele Zeitabschnitte werden mindestens zur Planung des Sportfestes benötigt?

Welche Disziplinen sollten zu welchen Zeitabschnitten stattfinden?

Die Knoten des Graphen stellen die zu planenden Disziplinen dar. Die Farben entsprechen den Zeitabschnitten, die den Disziplinen zuzuordnen sind.

Zwei Disziplinen d_1 und d_2 werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn es einen Sportler gibt, der sich zu beiden Disziplinen angemeldet hat.

Fortsetzung Beispiel.



Fortsetzung Beispiel.

Da beispielsweise der induzierte Untergraph zu den Knoten Hoch, 100 m und 5000 m vollständig ist, benötigen wir mindestens drei Farben für die Färbung des gesamten Graphen.

Das Diagramm des Graphen zeigt, dass wir tatsächlich mit drei Farben (schwarz, grau, weiß) auskommen.

Zeitabschnitt	Farbe	Disziplinen
1	schwarz	Hoch, Speer
2	grau	100 m, Weit
3	weiß	5000 m, Kugel

Zusammenfassung

- Planare Graphen: Eulersche Polyederformel und Schranken für die Anzahl von Kanten
- Färbungen, chromatische Zahl und chromatisches Polynom
- Planare Graphen sind 4-färbbar.
- Berechnung des chromatischen Polynoms durch Zerlegung in vollständige Graphen
- Anwendungen: Planungsprobleme mit konkurrierenden Ressourcen