Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Wintersemester 2019/29
Prof. Dr. Peter Becker

Graphentheorie

Aufgabenblatt 1

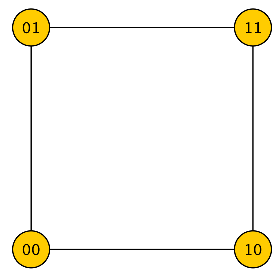
Besprechung am 15. Oktober 2019 in den Übungen

Aufgabe 1 (Hypercube, Handschlaglemma)

Der *n-dimensionale Hypercube* $H_n = (V_n, E_n)$ ist wie folgt definiert:

- V_n ist die Menge der Bitstrings der Länge n.
- Für zwei Bitstrings $p, q \in V_n$ gilt $\{p, q\} \in E_n$ genau dann, wenn p und q sich in genau einem Bit unterscheiden.

Das Diagramm rechts zeigt den 2-dimensionalen Hypercube H_2.



(a) Zeichnen Sie ein Diagramm des dreidimensionalen Hypercube H_3.

(b) Wie viele Knoten und wie viele Kanten hat der H_n? Geben Sie hierfür Formeln an und begründen Sie Ihre Formeln.

Hinweis zur Ermittlung der Kantenanzahl: Nutzen Sie das Handschlaglemma.

Aufgabe 2 (Grad, Handschlaglemma)

(a) Finden Sie zwei verschiedene schlichte Graphen mit 6 Knoten, in denen jeder Knoten den Grad 2 hat.

(b) Bei einer Party begrüßen sich die anwesenden Gäste, indem sie miteinander anstoßen.

Zeigen Sie: Es gibt zwei Gäste, die mit der gleichen Anzahl an Personen angestoßen haben.

(c) Ein Graph $G = (V, E)$, dessen Knoten alle den gleichen Grad r haben, heißt *r-regulär* bzw. einfach nur *regulär*.

Zeigen Sie: Für einen regulären Graphen gilt:

$$|E| = \frac{1}{2} \cdot r \cdot |V|.$$

(d) Begründen Sie: Wenn r ungerade ist, muss die Anzahl der Knoten eines r-regulären Graphen gerade sein.

Aufgabe 3 (Schubfachprinzip)

(a) Zeigen Sie: Unter je fünf Punkten in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 gibt es stets zwei, deren Abstand höchstens $1/2$ ist.

(b) Unter je 17 Punkten in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 gibt es stets zwei, deren Abstand höchstens d ist.

Bestimmen Sie einen geeigneten Wert für d und zeigen Sie mit diesem Wert die Gültigkeit der Aussage.

(c) Unter je s Punkten in einem Würfel der Seitenlänge 3 gibt es stets zwei, die einen Abstand $\leq \sqrt{3}$ haben.

Bestimmen Sie einen geeigneten Wert für s.

Aufgabe 4 (Schubfachprinzip)

Gegeben seien n natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 2^n - 2$. Zeigen Sie, dass es dann zwei nichtleere Indexmengen $I_1, I_2 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und $\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i$ gibt.