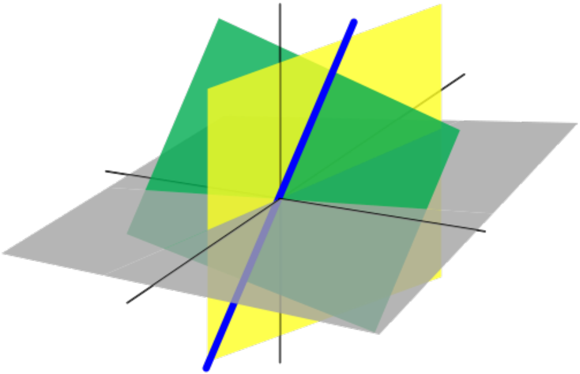
Kapitel 1

Wiederholung: Grundlagen aus der linearen Algebra



Inhalt

1. Wiederholung: Grundlagen aus der linearen Algebra
   - Notationen
   - Dimension, Basis, Rang
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Determinante

Notationen für K-Vektorraum

Zur Unterscheidung zwischen den Vektoren $\in V$ und den Skalaren $\in K$ schreiben wir die Vektoren mit fettgedruckten lateinischen Kleinbuchstaben, z. B.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_j) \in \mathbb{R}^n.$$

Für die Skalare nutzen wir üblicherweise griechische Kleinbuchstaben in Normalschrift, z. B.

$$\lambda \in \mathbb{R}.$$

Zur Abkürzung schreiben wir die Vektoren teilweise auch zeilenorientiert, also $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Den Nullvektor bezeichnen wir mit $\mathbf{0}$. Demgegenüber bezeichnet 0 das neutrale Element der Addition des Körpers.

In den meisten nachfolgenden Fällen verzichten wir auf die Verwendung des Multiplikationssymbols $\cdot$, sowohl bei der Multiplikation im Körper als auch bei der Multiplikation mit Skalaren. D. h.

$$\begin{aligned} \lambda\mu &:= \lambda \cdot \mu \\ \lambda\mathbf{v} &:= \lambda \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

für $\lambda, \mu \in K, \mathbf{v} \in V$.

☞ Wir bewegen uns im Folgenden fast ausschließlich im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Notationen für Matrizen

Die Menge der reellen Matrizen mit m Zeilen und n Spalten bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Zur Darstellung solcher Matrizen nutzen wir i. d. R. fette lateinische Großbuchstaben, z. B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Die Nullmatrix stellen wir ebenfalls durch $\mathbf{0}$ dar. Aus dem Kontext ergibt sich, ob damit der Nullvektor oder die Nullmatrix gemeint ist.

Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die transponierte Matrix von $\mathbf{A}$.

Einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ können wir auch als einspaltige Matrix $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ auffassen.

Das Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ können wir dann auch als Matrixprodukt $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ schreiben.

Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet

- $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ (fetter Kleinbuchstabe mit tiefgestelltem Index) den i-ten Zeilenvektor und
- $\mathbf{a}^j \in \mathbb{R}^m$ (fetter Kleinbuchstabe mit hochgestelltem Index) den j-ten Spaltenvektor von $\mathbf{A}$.

Also:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

Die Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n$ mit $\mathbf{e}^i = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ und

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bilden die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.

Die Matrix

$$\mathbf{E} := (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

bezeichnet die Einheitsmatrix.

Lineare Unabhängigkeit

Definition 1.1

Ein Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

und $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq k$ heißt Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

Definition 1.2

Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, wenn aus

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

stets $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ folgt. Andernfalls heißen sie linear abhängig.

Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn sich $\mathbf{0}$ nur auf triviale Weise als Linearkombination darstellen lässt.

Beispiel 1.3

- Folgende Vektoren sind linear unabhängig:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Dagegen sind diese Vektoren linear abhängig:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tafel ✎.

Lemma 1.4

Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ *seien linear abhängig. Dann existiert ein* $j, 1 \leq j \leq k$ *mit*

$$\mathbf{v}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i \mathbf{v}_i .$$

☞ Wenn Vektoren linear abhängig sind, kann also mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden.

Beweis.

Tafel ✎. □

Basis und Dimension eines Vektorraums

Definition 1.5

- Der Spann (oder die lineare Hülle) der Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge alle Linearkombinationen dieser Vektoren:

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Für einen Vektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt eine Menge $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ von Vektoren Erzeugendensystem von V, wenn

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = V$$

gilt.

Fortsetzung Definition.

- Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V heißt Basis von V.
- Die Anzahl der Vektoren in einer Basis von V heißt Dimension von V und wird mit $\dim(V)$ bezeichnet.

- Alle Basen eines Vektorraums V haben die gleiche Anzahl an Vektoren. $\dim(V)$ ist somit sinnvoll definiert.
- Vektorräume können auch eine unendliche Dimension haben. Beispiel: $C^0([a,b])$.
- Der $\mathbb{R}^n$ hat natürlich die Dimension n, aber (echte) Unterräume des $\mathbb{R}^n$ haben eine kleinere Dimension.
- Der Unterraum $(\{\mathbf{0}\}, +, \cdot)$ ist der sogenannte Nullvektorraum oder auch Nullraum. Er hat die Dimension 0.

Rang einer Matrix

Definition 1.6

Der Rang $r(\mathbf{A})$ einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$.

Bemerkung:

$$r(\mathbf{A}) = \dim(\mathrm{Span}(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n))$$

Satz 1.7

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Dann gilt:

(a) $r(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$

(b) $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$

(c) $r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$

Beispiel zum Matrixrang

Beispiel 1.8

Für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich $r(\mathbf{A}) = 2$.

Begründung: Die Spaltenvektoren $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^2$ sind linear unabhängig, somit folgt $r(\mathbf{A}) \geq 2$.

Aus Satz 1.7 (c) folgt $r(\mathbf{A}) \leq \min\{2, 3\} = 2$.

Also muss $r(\mathbf{A}) = 2$ gelten.

Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die allgemeine Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}$$

Hierbei sind $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten und x_j die Unbekannten des LGS.

Wir können das LGS auch schreiben als

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

oder in Matrixschreibweise mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

als

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Beispiel LGS

Beispiel 1.9

Das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

und seine Darstellung in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Definition 1.10

Für ein LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ bezeichne

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} := (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{m \times n+1}$$

die um den Vektor $\mathbf{b}$ der rechten Seite erweiterte Matrix $\mathbf{A}$.

Satz 1.11

- *Es sei* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *und* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. *Dann ist das LGS*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

  genau dann lösbar, wenn $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ *gilt.*
- *Gilt zusätzlich* $r(\mathbf{A}) = n$, *dann gibt es genau eine Lösung* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- *Falls* $r(\mathbf{A}) < n$ *gilt, gibt es unendlich viele Lösungen mit* $n - r(\mathbf{A})$ *freien Parametern.*

Bemerkungen

Für $m < n$ kann die Bedingung $r(\mathbf{A}) = n$ nicht erfüllt werden und es gibt daher keine eindeutige Lösung (falls es überhaupt eine Lösung gibt).

Wenn keine Lösung existiert, dann heißt das LGS überbestimmt, existieren unendlich viele Lösungen, dann ist es unterbestimmt.

Für $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ spricht man von einem homogenen LGS.

Hat ein homogenes LGS nur die Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dann sind die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ linear unabhängig.

Beispiele für Lösbarkeit von LGS

Beispiel 1.12

Für das LGS aus Beispiel 1.9 gilt $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$ (siehe auch Beispiel 1.8). Also ist das LGS lösbar mit unendlich vielen Lösungen und einem freien Parameter.

Beispiel 1.13

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r(\mathbf{A}) = 3, \quad r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$$

lösbar, da $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ und mit eindeutiger Lösung, da $r(\mathbf{A}) = 3 = n$.

Fortsetzung Beispiel.

(b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad r(\mathbf{A}) = 2, \quad r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$$

lösbar, da $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ und mit unendlich vielen Lösung, da $r(\mathbf{A}) = 2 < n$.

(c)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 8 & 4 \\ 3 & -12 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad r(\mathbf{A}) = 1, \; r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 1$$

lösbar, da $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ und mit unendlich vielen Lösung, da $r(\mathbf{A}) = 1 < n$.

Fortsetzung Beispiel.

(d)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -10 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r(\mathbf{A}) = 2, \quad r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$$

unlösbar, da $r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Bemerkungen:

- Bei direkten Methoden für Gleichungssysteme betrachtet man eindeutig lösbare Gleichungssysteme. ☞ Kapitel 2
- In der Ausgleichsrechnung hat man überbestimmte Gleichungssysteme und versucht diese, mit einem möglichst geringen Gesamtfehler zu “lösen”. ☞ Kapitel 3
- In der Optimierung mit Nebenbedingungen treten überwiegend unterbestimmte Systeme auf. ☞ Kapitel 4

Permutationen

Definition 1.14

Es sei $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine n-elementige Menge. Dann heißt eine bijektive Abbildung

$$\sigma : X \to X$$

Permutation.

Satz 1.15

Für eine n-elementige Menge X gibt es $n!$ verschiedene Permutationen.

- Für die mathematische Betrachtung von Permutationen beschränkt man sich üblicherweise auf $X = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Für uns ist eine Permutation also stets eine bijektive Abbildung

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Schreibweise von Permutationen

Eine Permutation $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ stellt man üblicherweise in Form einer zweizeiligen Matrix

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

oder verkürzt in Tupelform

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

dar.

Beispiel 1.16

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Gruppe

Definition 1.17

S_n bezeichne die Menge aller Permutationen auf der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$.

Bemerkung:

- $(S_n, \circ)$ bildet mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe.
- S_n wird auch als symmetrische Gruppe bezeichnet.
- Eine Permutationsgruppe ist eine Untergruppe von S_n.
- Nach dem sogenannten Satz von Cayley ist jede endliche Gruppe isomorph zu einer Permutationsgruppe.

Fehlstand und Signum einer Permutation

Definition 1.18

- Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ heißt ein Paar (i, j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ Fehlstand.
- Die Zahl
$$F(\sigma) = |\{(i, j) \,|\, 1 \leq i < j \leq n \land \sigma(i) > \sigma(j)\}|$$
bezeichnet die Anzahl der Fehlstände von σ.
- Das Signum $\text{sign}(\sigma)$ einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist definiert als
$$\text{sign}(\sigma) = (-1)^{F(\sigma)}.$$
- Eine Permutation mit $\text{sign}(\sigma) = 1$ heißt gerade, eine Permutation mit $\text{sign}(\sigma) = -1$ ungerade.

Beispiel 1.19

Die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 1.16 hat die Fehlstände

$$\{(1,3),(2,3),(2,4)\}.$$

Also gilt

$$F(\sigma) = 3$$

und damit

$$\mathrm{sign}(\sigma) = -1.$$

Die Permutation ist somit ungerade.

Eigenschaften des Signum

Satz 1.20

Es sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Dann gilt

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Für zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ gilt

$$\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sign}(\tau) \cdot \operatorname{sign}(\sigma).$$

Determinante

Definition 1.21

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Dann heißt

$$\det(\mathbf{A}) := \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)} \right)$$

Determinante der Matrix $\mathbf{A}$.

Bemerkungen:

- Die Formel in Definition 1.21 heißt Leibniz-Formel und geht zurück auf Gottfried Wilhelm Leibniz.
- Summiert wird über die Elemente der symmetrischen Gruppe S_n. Die Summe besteht demnach aus $n!$ Summanden.

Beispiel zur Berechung der Determinante

Beispiel 1.22

Für $n = 3$ enthält die symmetrische Gruppe S_n die Permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{sign}(\sigma) = +1$ und die Permutationen

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{array}{rrrrr} & 3 \cdot 2 \cdot 1 & + & 0 \cdot 1 \cdot (-3) & + & 1 \cdot 6 \cdot (-2) \\ - & 1 \cdot 2 \cdot (-3) & - & 3 \cdot 1 \cdot (-2) & - & 0 \cdot 6 \cdot 1 \end{array} \\
&= 6 + 0 - 12 + 6 + 6 - 0 \\
&= 6.
\end{aligned}$$

Eigenschaften der Determinante (1)

Satz 1.23 (Laplacescher Entwicklungssatz)

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eine Matrix.* $\mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ *bezeichne die Matrix, die aus* $\mathbf{A}$ *durch Streichen der* i*-ten Zeile und* j*-ten Spalte entsteht.*

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \end{aligned}$$

Die erste Gleichung beschreibt die Entwicklung nach der j*-ten Spalte, die zweite Gleichung die Entwicklung nach der* i*-ten Zeile.*

Eigenschaften der Determinante (2)

Satz 1.24

Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *quadratische Matrizen. Dann gilt:*

(a) $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$

(b) *Für* $r \in \mathbb{R}$ *gilt* $\det(r\mathbf{A}) = r^n \det(\mathbf{A})$

(c) $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$

Determinante und Lösbarkeit eines LGS

Satz 1.25

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eine Matrix. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

(b) *Die Spaltenvektoren (bzw. Zeilenvektoren) von* $\mathbf{A}$ *sind linear unabhängig.*

(c) $r(\mathbf{A}) = n$

(d) *Für alle* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *ist das LGS* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *eindeutig lösbar.*

(e) *Es existiert eine Matrix* $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Cramersche Regel

Satz 1.26

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eine quadratische Matrix mit* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. *Für das LGS* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *sei*

$$\mathbf{A}_j := (\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}^{j+1}, \ldots, \mathbf{a}^n),$$

also die Matrix, die entsteht, wenn in $\mathbf{A}$ *die* j*-te Spalte durch den Vektor* $\mathbf{b}$ *ersetzt wird.*

Dann gilt für die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ *des Gleichungssystems* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}.$$

Beispiel 1.27

Wir betrachten das LGS aus Beispiel 1.13 (a). Die Determinate $\det(\mathbf{A}) = 6$ haben wir bereits in Beispiel 1.22 berechnet.

$$\det(\mathbf{A}_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 6 + 2 + 2 - 0 = 0$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 9 - 3 - 6 + 9 + 3 - 6 = 6$$

$$\det(\mathbf{A}_3) = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -6 + 0 - 12 + 6 + 18 - 0 = 6$$

Daraus folgt:

$$x_1 = \frac{0}{6} = 0, \quad x_2 = \frac{6}{6} = 1, \quad x_3 = \frac{6}{6} = 1.$$

Zusammenfassung

- Lineare Unabhängigkeit
- Matrixrang
- Zusammenhang: Matrixrang und Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
- Determinante in Form der Leibniz-Formel
- Cramersche-Regel