Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Sommersemester 2024
Prof. Dr. Peter Becker

Mathematisch-algorithmische Grundlagen für Data Science

Aufgabenblatt 1

Abgabe zu **zweit** vor der Vorlesung am 16. April 2024.

Sollpunktzahl: 15 Punkte

Aufgabe 1 (Lineare Unabhängigkeit) — 2+2=4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

Aufgabe 2 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen) — 2+2+2=6 Punkte

Bestimmen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzen.

(a)

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 11 \\ 5x_1 & - & x_2 & = & 8 \\ x_1 & - & 5x_2 & = & 16 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & & & & x_3 & = & -2 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & - & 6x_3 & - & 8x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & + & 12x_4 & = & 2 \end{array}$$

Aufgabe 3 (Berechnung der Determinante) 4 Punkte

Berechnen Sie für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

die Determinante $\det(\mathbf{A})$ mithilfe der Leibniz-Formel.

Aufgabe 4 (Cramersche Regel) 3 Punkte

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mithilfe der Cramerschen Regel (Satz 1.26):

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}$$

Aufgabe 5 (Leibniz-Formel und Cramersche Regel in Python) 4+2=6 Punkte

(a) Implementieren Sie die Leibniz-Formel zur Berechnung der Determinate einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Hinweis: Mit der Funktion `itertools.permutations(range(n))` können Sie alle Permutationen für die Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ erzeugen.

- Implementieren Sie die Cramersche Regel zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit einer regulären Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in Python.

  Hinweis: Nutzen Sie Ihre Funktion aus Teil (a).