Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 12
Sommersemester 2025

Aufgabe 1 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

(i) Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sin(x)(x-1)$. Zeigen Sie, daß f im offenen Intervall $(0, 1)$ genau einen stationären Punkt besitzt!

(ii) Beweisen Sie die folgende Ungleichung:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}_+} \; \log(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

<u>Hinweis:</u> Bernoullische Ungleichung!

Musterlösung:

(i) Wegen $f(0) = f(1) = 0$, und da f als Zusammensetzung einer trigonometrischen Funktion und einem Polynom differenzierbar und nichtkonstant ist, gilt nach dem Satz von Rolle, daß f im offenen Intervall $(0, 1)$ mindestens einen stationären Punkt besitzt.

(ii) Betrachte die Funktion

$$f(t) := \log(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$$

im Intervall $[0, x]$. Da f auf diesem Intervall als Zusammensetzung von Logarithmusfunktion mit echt positivem Argument und rationaler Funktion mit Nenner ungleich 0 differenzierbar ist, gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\exists_{\xi \in [0,x]} \; f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \;\Leftrightarrow\; f(x) = x f'(\xi)$$

Weiterhin gilt für $t \in [0,x]$ wegen $\left(\frac{1}{t}\right)' = \left(t^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{1+t} - \frac{1}{\sqrt{1+t}} + \frac{t}{2(1+t)\sqrt{1+t}} = \frac{\sqrt{1+t}-(1+t)+\frac{t}{2}}{(1+t)\sqrt{1+t}} \\ &= \frac{\sqrt{1+t}-1-\frac{t}{2}}{(1+t)\sqrt{1+t}} = \frac{\sqrt{1+t}-\left(1+\frac{t}{2}\right)}{(1+t)\sqrt{1+t}} \end{aligned}$$

Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt $t+\frac{t}{2} \geq \sqrt{1+t}$, also ist der Zähler negativ, und somit gilt

$$f(x) = xf'(\xi) \leq 0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Es geht auch ohne den MWS: Wegen $f(0)=0$ und dadurch, daß f auf $[0,x]$ monoton fallend ist, gilt auch $\forall_{x>0}\ f(x) \leq 0$.

Aufgabe 2 (Regel von de l'Hospital)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mithilfe der Regel von de l'Hospital!

(i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+3x-1}{2x}$$

(ii)

$$\lim_{x\to a} \frac{x^a-a^x}{a^x-a^a},\ a>0,\ a\neq 1$$

(iii) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, daß die Funktion $f : \mathbb{R}-+ \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}, & x \neq 1 \\ c, & x = 1 \end{cases}$$

stetig ist!

Musterlösung:

(i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+3x-1}{2x} \quad = \quad \left(\frac{0}{0}=\right) \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)+3}{2} = \frac{3}{2}$$

(ii)

$$\lim_{x\to a} \frac{x^a-a^x}{a^x-a^a} \quad = \quad \left(\frac{0}{0}=\right) \lim_{x\to a} \frac{ax^{a-1}-a^x\log(a)}{a^x\log(a)} = \frac{a^a-a^a\log(a)}{a^a\log(a)} = \frac{1-\log(a)}{\log(a)}$$

(iii) Die Funktion $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}$ ist für $x \neq 1$ als Zusammensetzung von rationalen Funktionen mit Nenner ungleich 0 und Logarithmusfunktion mit echt positivem Argument stetig. Wegen

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log(x)} &= \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)-(x-1)}{(x-1)\log(x)} = \left(\frac{0}{0} =\right) \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{\log(x)+1-\frac{1}{x}} \\
&= \left(\frac{0}{0} =\right) \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ist f genau dann stetig, wenn $c = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 3 (Genauigkeit von Differenzenquotienten)

Vielleicht kennen Sie bereits die sog. $\mathcal{O}$-Notation: Für $p \in \mathbb{N}$ bedeutet $f \in \mathcal{O}(h^p)$ bspw., daß die Funktion f asymptotisch (d.h. für $h \to 0$) nicht schneller fällt als die Funktion $g(h) := h^p$. Zeigen Sie mithilfe der Taylorentwicklung, daß für den einfachen Differenzenquotienten gilt:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \mathcal{O}(h)$$

und für den zentralen Differenzenquotienten aus Aufgabe 3 (Übung 10):

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Dabei sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindestens viermal stetig differenzierbar, $x \in \mathbb{R}$ und $h > 0$. Der Ausdruck $f'(x)+\mathcal{O}(h^p)$ bedeutet, daß auf $f'(x)$ ein Term addiert wird, dessen führender Term eine Konstante mal h^p ist.

Musterlösung:

Taylorentwicklung von $f(x \pm h)$ um den Entwicklungspunkt x liefert:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{6} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

woraus sofort folgt

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \mathcal{O}(h)$$

Subtrahiert man $f(x-h)$ von $f(x+h)$, so heben sich die geraden Terme weg:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

Division durch $2h$ liefert:

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Da $h \to 0$, ist der Term h^2 asymptotisch kleiner als h. Daher ist der zentrale Differenzenquotiente doppelt so genau wie der einfache.

Aufgabe 4 (Integrale geometrisch)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale nur geometrisch, d.h. ohne Bildung einer Stammfunktion!

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x + 1\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

Musterlösung:

(a) Die Gerade $g(x) := x+1$ bildet auf dem Intervall $[-1,3]$ mit der x-Achse ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Flächeninhalt durch

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot g(3) = 2\cdot 4 = 8 = \int_{-1}^{3} x+1\,dx$$

gegeben ist.

(b) Das Integral ist gleich der Fläche des Halbkreises oberhalb der x-Achse mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 2. Es gilt also

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2 = 2\pi$$

Aufgabe 5* (Regel von de l'Hospital)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mithilfe der Regel von de l'Hospital!

(i)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\log(x)}{x^b},\ \ b>0$$

(ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)}$$

(iii)

$$\lim_{x \searrow \pi} (\pi - x) \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Tipp: Schreiben Sie die Funktion als geeigneten Doppelbruch!

Musterlösung:

(i) Für $b > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\log(x)}{x^b} \quad = \quad \left(\frac{\infty}{\infty} =\right) \frac{\frac{2}{x}}{bx^{b-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{bx^b} = 0$$

(ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)} \quad = \quad \left(\frac{\infty}{\infty} =\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log(x)} = 0$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \searrow \pi} (\pi - x) \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \lim_{x \searrow \pi} \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\pi - x}} \left(= \frac{-\infty}{\infty}\right) \\
&= \lim_{x \searrow \pi} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{1}{(\pi-x)^2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \searrow \pi} \frac{(\pi - x)^2}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \left(= \frac{0}{0}\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \searrow \pi} \cdot \frac{-2(\pi - x)}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\right)} \left(= \frac{0}{0}\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \searrow \pi} \frac{2}{\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 6* (Iaylorentwicklung)

Approximieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \log(1 + ax), \; a \in \mathbb{R},$$

eine Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$, und berechnen Sie deren Konvergenzradius in Abhängigkeit von a!

Musterlösung:

Es gilt:

$$f'(x) = \tfrac{a}{1+ax}$$
$$f''(x) = \tfrac{-a^2}{(1+ax)^2}$$
$$f'''(x) = \tfrac{2a^3}{(1+ax)^3}$$
$$f^{(iv)}(x) = \tfrac{-6a^4}{(1+ax)^4}$$

und somit

$$f(1) = \log(1+a)$$
$$f'(1) = \tfrac{a}{1+a}$$
$$f''(1) = \tfrac{-a^2}{(1+a)^2}$$
$$f'''(1) = \tfrac{2a^3}{(1+a)^3}$$
$$f^{(iv)}(1) = \tfrac{-6a^4}{(1+a)^4}$$

Also folgt allgemein

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}(k-1)!\frac{a^k}{(1+a)^k}$$

Für die Taylorreihe ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} T_f(x) &= \log(1+a) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(k-1)!\frac{a^k}{(1+a)^k}\frac{(x-1)^k}{k!} \\ &= \log(1+a) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k\frac{(x-1)^k}{k} \end{aligned}$$

Für den Konvergenzradius R der Taylorreihe gilt:

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k}{(-1)^{k+2}\frac{1}{k+1}\left(\frac{a}{1+a}\right)^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}\cdot\left|\frac{1+a}{a}\right| = \left|\frac{1+a}{a}\right|$$