Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 12
Sommersemester 2023
– Musterlösungen –

Aufgabe 1 (Taylorentwicklung)

Approximieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \log(1 + ax),\ \ a \in \mathbb{R},$$

eine Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$, und berechnen Sie deren Konvergenzradius in Abhängigkeit von a!

Musterlösung:

Es gilt:

$$f'(x) = \tfrac{a}{1+ax}$$
$$f''(x) = \tfrac{-a^2}{(1+ax)^2}$$
$$f'''(x) = \tfrac{2a^3}{(1+ax)^3}$$
$$f^{(iv)}(x) = \tfrac{-6a^4}{(1+ax)^4}$$

und somit

$$f(1) = \log(1 + a)$$
$$f'(1) = \tfrac{a}{1+a}$$
$$f''(1) = \tfrac{-a^2}{(1+a)^2}$$
$$f'''(1) = \tfrac{2a^3}{(1+a)^3}$$
$$f^{(iv)}(1) = \tfrac{-6a^4}{(1+a)^4}$$

Also folgt allgemein

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}(k-1)!\frac{a^k}{(1+a)^k}$$

Für die Taylorreihe ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} T_f(x) &= \log(1+a) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(k-1)!\frac{a^k}{(1+a)^k}\frac{(x-1)^k}{k!} \\ &= \log(1+a) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k\frac{(x-1)^k}{k} \end{aligned}$$

Für den Konvergenzradius R der Taylorreihe gilt:

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k}{(-1)^{k+2}\frac{1}{k+1}\left(\frac{a}{1+a}\right)^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k}\cdot\left|\frac{1+a}{a}\right| = \left|\frac{1+a}{a}\right|$$

Aufgabe 2 (Genauigkeit von Differenzenquotienten)

Vielleicht kennen Sie bereits die sog. $\mathcal{O}$-Notation: Für $p \in \mathbb{N}$ bedeutet $f \in \mathcal{O}(h^p)$ bspw., daß die Funktion f asymptotisch (d.h. für $h \to 0$) nicht schneller fällt als die Funktion $g(h) := h^p$. Zeigen Sie mithilfe der Taylorentwicklung, daß für den einfachen Differenzenquotienten gilt:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \mathcal{O}(h)$$

und für den zentralen Differenzenquotienten aus Aufgabe 3 (Übung 10):

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Dabei sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindestens viermal stetig differenzierbar, $x \in \mathbb{R}$ und $h > 0$. Der Ausdruck $f'(x)+\mathcal{O}(h^p)$ bedeutet, daß auf $f'(x)$ ein Term addiert wird, dessen führender Term eine Konstante mal h^p ist.

Musterlösung:

Taylorentwicklung von $f(x \pm h)$ um den Entwicklungspunkt x liefert:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) \pm \frac{h^3}{6}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

woraus sofort folgt

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \mathcal{O}(h)$$

Subtrahiert man $f(x-h)$ von $f(x+h)$, so heben sich die geraden Terme weg:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

Division durch $2h$ liefert:

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Da $h \to 0$, ist der Term h^2 asymptotisch kleiner als h. Daher ist der zentrale Differenzenquotiente doppelt so genau wie der einfache.

Aufgabe 3 (Integrale geometrisch)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale nur geometrisch, d.h. ohne Bildung einer Stammfunktion!

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x+1\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

Musterlösung:

(a) Die Gerade $g(x) := x+1$ bildet auf dem Intervall $[-1,3]$ mit der x-Achse ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Flächeninhalt durch

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot g(3) = 2\cdot 4 = 8 = \int_{-1}^{3} x+1\,dx$$

gegeben ist.

(b) Das Integral ist gleich der Fläche des Halbkreises oberhalb der x-Achse mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 2. Es gilt also

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2 = 2\pi$$

Aufgabe 4 (Integrale)

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a)
$$\int 4x^3 + 3x + 1 + \frac{6}{x} + 5 \cdot \sqrt[4]{x}\, dx$$

(b)
$$\int \log(x^2)\, dx$$

(c)
$$\int \frac{\cos(x)}{3 + 4\sin(x)}\, dx$$

Musterlösung:

(a)
$$\int 4x^3 + 3x + 1 + \frac{6}{x} + 5 \cdot \sqrt[4]{x}\, dx = x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x + 6\log(|x|) + 4x\sqrt[4]{x} + c$$

(b)
$$\int \log(x^2)\, dx = 2\int \log(x)\, dx = 2x(\log(x) - 1) + c$$

(c) Substituiere $z := \sin(x)$. Dann gilt $\frac{dz}{dx} = \cos(x)$ und somit $dx = \frac{dz}{\cos(x)}$. Also gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(x)}{3 + 4\sin(x)}\, dx &= \int \frac{\cos(x)}{3 + 4z} \frac{dz}{\cos(x)} = \int \frac{dz}{3 + 4z} \\ &= \frac{1}{4}\log(|3 + 4z|) = \frac{1}{4}\log(|3 + 4\sin(x)|) + c \end{aligned}$$