Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis
Übungsblatt 1
Sommersemester 2025

Aufgabe 1 (Anordnungsaxiome)

Sei $\mathcal{K}$ ein angeordneter Körper mit $a, b, x, y \in \mathcal{K}$. Beweisen Sie mithilfe der Anordnungsaxiome:

(i)

$$\forall_{b>0}\ 2xy \leq \frac{1}{b}x^2 + by^2$$

(ii)

$$\forall_{1<x<y}\ x + \frac{1}{x} < y + \frac{1}{y}$$

Aufgabe 2 (Binomische Formel)

(i) Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an. Das entspricht der Anzahl der Möglichkeiten aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln zu ziehen, wobei die Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge der gezogenen Kugeln keine Rolle spielt (mathematisch nennt man das auch (n, k)-*Kombinationen ohne Wiederholung*). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim *Lotto* 6 *aus* 49 sechs Richtige anzukreuzen?

(ii) Beweisen Sie die Rekursionsgleichung

$$\binom{0}{0} = 1,\ \binom{1}{0} = 1,\ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \text{ für } n \geq k \geq 0,\, n \geq 2$$

(iii) Die Rekursionsgleichung aus **(ii)** ist die Grundlage für das so genannte *Pascalsche Dreieck*:

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
$\vdots$						$\ldots$					

Der Wert, der in der n-ten Zeile und der k-ten Spalte steht, ergibt sich als Summe der beiden Werte, die in der Zeile darüber, also in der $(n-1)$-ten Zeile, und dort in derselben Spalte und in der Spalte davor, also in der k-ten und der $(k-1)$-ten Spalte stehen.

Ermitteln Sie mithilfe des Pascalschen Dreiecks die Binomialkoeffizienten $\binom{3}{2}$, $\binom{9}{6}$ und $\binom{7}{5}$.

(iv) Beweisen Sie die Binomische Formel, also zeigen Sie, daß für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Verwenden Sie vollständige Induktion sowie die Rekursionsgleichung aus **(ii)**)! Führen Sie eine oder mehrere Indexverschiebungen durch!

(v) Berechnen Sie mithilfe von **(iv)** die Binome $(a+b)^5$ und $(a+b)^6$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

(vi) Beweisen Sie mithilfe der Binomischen Formel:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Aufgabe 3 (Potenzen)

Welche Zahl ist größer: 1.01^{100} oder 2? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4* (Bruchrechnung und Termumformungen mit binomischen Formeln)

Es seien $a, b, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $y \in \mathbb{R}\backslash\{-5\}$. Zeigen Sie:

(i)

$$a^2 + b^2 = 5ab \;\Rightarrow\; \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 23$$

(ii)

$$y + \frac{1}{y+5} = -7 \;\Rightarrow\; (y+7)^9 + \frac{1}{(y+7)^9} = 2$$

(iii) Lösen Sie die folgende Bruchungleichung:

$$\frac{1}{2x} > \frac{1}{3x} - 2$$

Hinweis: Fallunterscheidung!