Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis

Klausur Sommersemester 2018

19. September 2018

Musterlösungen

Aufgabe 1 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 3n^5 + 2n - 7n^9}{14n^9 - 5n^7 + 12n^3 + 1}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} a_n,$$

wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert ist:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$$

Hinweis: Sie müssen zunächst mit einem geeigneten Konvergenzkriterium zeigen, daß diese Folge überhaupt konvergiert, erst dann können Sie den Grenzwert berechnen!

(c)

$$\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh(x)}{\tan(x)}$$

(d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$$

Musterlösung:

(a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 3n^5 + 2n - 7n^9}{14n^9 - 5n^7 + 12n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^7} - \frac{3}{n^4} + \frac{2}{n^8} - 7}{14 - \frac{5}{n^2} + \frac{12}{n^6} + \frac{1}{n^9}} = \frac{0 - 0 + 0 - 7}{14 - 0 + 0 + 0} = -\frac{1}{2}$$

(b) Am besten schreibt man sich zunächst ein paar Folgeglieder auf:

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{7},\ a_3 = \frac{1}{15}$$

Sicherlich gilt $\forall_{n\in\mathbb{N}_0}\ a_n \geq 0$. Somit ist (a_n) nach unten beschränkt. Es läßt sich vermuten, daß die Folge monoton fallend ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} & a_{n+1} \leq a_n \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{a_n}{a_n + 2} \leq a_n \\ \overset{a_n \geq 0}{\Leftrightarrow} \quad & a_n \leq a_n(a_n + 2) = a_n^2 + 2a_n \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leq a_n^2 + a_n \end{aligned}$$

Letzteres ist eine wahre Aussage. Da es sich stets um Äquivalenzumformungen handelt, ist bewiesen, daß die Folge monton fallend ist.

Wegen

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_0}\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+2} \le \frac{a_n}{a_n} = 1$$

ist (a_n) auch nach oben beschränkt, also beschränkt. Nach dem Kriterium über die monotone Konvergenz ist die Folge also konvergent. Für den Grenzwert muß gelten:

$$\begin{aligned} & a = \frac{a}{a+2} \\ \Leftrightarrow\quad & a(a+2) = a \\ \Leftrightarrow\quad & a^2 + 2a = a \\ \Leftrightarrow\quad & a^2 + a = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a(a+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a = 0 \ \vee\ a = -1 \end{aligned}$$

Da $\forall_{n\in\mathbb{N}_0}\ a_n \ge 0$, scheidet $a = -1$ als Grenzwert aus. Der Grenzwert ist also $a = 0$.

(c) Da sinh auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist und wegen

$$\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$$

gilt

$$\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh(x)}{\tan(x)} = 0$$

(d) Es liegt der Fall $\frac{\infty}{\infty}$ vor. Also ist die Regel von de l'Hospital anwendbar:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2} &= \left(\frac{\infty}{\infty} =\right) \lim_{x\to\infty} \frac{2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x}{2(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+x^2}{2(\mathrm{e}^x-1)} \\ &= \left(\frac{\infty}{\infty} =\right) \lim_{x\to\infty} \frac{2+2x}{2e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{\mathrm{e}^x} \end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Wer das nicht weiß, kann auch nochmal l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{\mathrm{e}^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} =\right) \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$$

Also folgt insgesamt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2} = 0$$

Aufgabe 2 (2+2+3+3=10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie jeweils an, welches Kriterium Sie verwenden!

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$$

(b) Berechnen Sie auch den Grenzwert dieser Reihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-(-1)^n\sqrt{n}}{(3n+2)^3}$$

(d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Potenzreihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}(x-2)^n$$

Musterlösung:

(a) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0$ ist $\frac{n^2}{n^2+1}$ keine Nullfolge. Also ist die Reihe nach dem Nullfolgenkriterium divergent.

(b) Es handelt sich um eine geometrische Reihe. Da $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$, ist diese (absolut) konvergent:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n - 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} - \frac{9}{5} \\ &= 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}\end{aligned}$$

(c) Wegen

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-(-1)^n\sqrt{n}}{(3n+2)^3} &\leq \frac{2n+\sqrt{n}}{(3n+2)^3} \leq \frac{2n+n}{(3n+2)^3} \\ &= \frac{3n}{(3n+2)^3} \leq \frac{3n}{(3n)^3} = \frac{3n}{27n^3} = \frac{1}{9n^2}\end{aligned}$$

ist $\dfrac{1}{9}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ eine konvergente Majorante für die Reihe, also ist die Reihe nach dem Majorantenkriterium konvergent.

(d) Sei $a_n := \binom{2n}{n}$. Für den Konvergenzradius R der Potenzreihe gilt dann

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2(n+1)}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n!}{n!n!}}{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!} \\ &= \lim_{n\to\infty}(n+1)^2\cdot\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{1+0+0}{4+0+0} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Also konvergiert die Potenzreihe (absolut) für $|x-2| < R = \frac{1}{4}$, also für $-\frac{1}{4} < x-2 < \frac{1}{4}$, also für $\frac{7}{4} < x < \frac{9}{4}$.

Es geht natürlich auch mit dem Quotientenkriterium:

Sei $\tilde{a}_n := \binom{2n}{n}(x-2)^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\tilde{a}_{n+1}}{\tilde{a}_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}}\cdot\frac{|x-2|^{n+1}}{|x-2|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{2n!}{n!n!}}\cdot|x-2| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\cdot|x-2| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\cdot(2n+2)(2n+1)\cdot|x-2| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}\cdot|x-2| = \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\cdot|x-2| \\ &= \frac{4+0+0}{1+0+0}\cdot|x-2| = 4\cdot|x-2| \end{aligned}$$

Dies ist genau dann < 1 wenn $|x-2| < \frac{1}{4}$, also ist nach dem Quotientenkriterium die Potenzreihe für $\frac{7}{4} < x < \frac{9}{4}$ (s.o.) (absolut) konvergent.

Aufgabe 3 (3+3+4=10 Punkte)

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 3x^2 - a, & x \geq 1, \\ x^3 + a, & x < 1 \end{cases}$$

stetig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Wo ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1, \\ 1, & x = 1 \\ \log(x), & x > 1 \end{cases}$$

stetig bzw. unstetig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Geben Sie ein offenes Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ an, in dem die Gleichung

$$\frac{1}{2}\sin^2(x) = -\cos(x)$$

genau eine Lösung hat!
Hinweis: Existenz und Eindeutigkeit müssen bewiesen werden!

Musterlösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 1} f(x) &= \lim_{x \searrow 1}(3x^2 - a) = 3 - a \\ \lim_{x \nearrow 1} f(x) &= \lim_{x \nearrow 1}(x^3 + a) = 1 + a \end{aligned}$$

Es gilt $3 - a = 1 + a \;\Leftrightarrow\; 2 = 2a \;\Leftrightarrow\; a = 1$. Also stimmen für $a = 1$ an der Stelle $x_0 = 1$ links- und rechtsseitiger Grenzwert (beide 2) und Funktionswert $f(1) = 2$ überein. Somit ist f für $a = 1$ an der Stelle $x_0 = 1$ stetig. Da beide Teilfunktionen als Polynome stetig sind, ist f für $a = 1$ stetig.

(b) Es gilt zwar

$$\lim_{x \searrow 1} g(x) = \lim_{x \searrow 1} \log(x) = 0 = \lim_{x \nearrow 1}(x^2 - 1) = \lim_{x \nearrow 1} g(x)$$

also links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen an der Stelle $x_0 = 1$ überein, sind allerdings ungleich dem Funktionswert $g(1) = 1 \neq 0$. Also ist g an der Stelle $x_0 = 1$ unstetig. Da $x^2 - 1$ als Polynom und die Logarithmusfunktion stetig sind, ist g ansonsten stetig.

(c) Wir betrachten die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; h(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x) + \cos(x)$$

welche als Zusammensetzung trigonometrischer Funktionen stetig ist. Wegen

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 > 0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} > 0 \\ h(\pi) &= -1 < 0 \end{aligned}$$

hat h nach dem Zwischenwertsatz im offenen Intervall $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ eine Nullstelle und die Gleichung somit eine Lösung. Es gilt

$$h'(x) = \sin(x)\cos(x) - \sin(x)$$

Auf $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ gilt $\sin(x) > 0$ und $\cos(x) < 0$, also $\sin(x)\cos(x) < 0$ und $h'(x) < 0$. Also ist h auf diesem Intervall streng monoton fallend. Damit ist die Nullstelle bzw. die Lösung der Gleichung in dem Intervall eindeutig.

Aufgabe 4 (2+(3+5)=10 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := \log(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

auf einem Intervall $[0,b] \subseteq \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, daß es ein $\xi \in [0,b]$ gibt mit

$$f(b) = bf'(\xi)$$

Hinweis: Verwenden Sie einen zentralen Satz aus der Differentialrechnung!

(b) Wir betrachten die Funktion $f : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^2 + \sqrt{2-x^2}$$

(i) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f, und zeigen Sie, daß die zweite Ableitung durch

$$f''(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$$

gegeben ist!

(ii) Wo ist die Funktion konvex bzw. konkav? Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f. **Hinweis:** Sie dürfen hier das Ergebnis für $f''(x)$ verwenden, auch wenn Sie Teilaufgabe (i) nicht (korrekt) gelöst haben!

Musterlösung:

(a) Da f auf ihrem Definitionsbereich als Zusammensetzung einer Logarithmusfunktion und einem Quotienten eines Polynoms und einer Wurzelfunktion differenzierbar ist, gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\exists_{\xi \in [0,b]}\ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{f(b) - 0}{b} = \frac{f(b)}{b}$$

also $f(b) = bf'(\xi)$

(b) (i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{2x}{2\sqrt{2-x^2}} = 2x - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \\ f''(x) &= 2 - \frac{\sqrt{2-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{2-x^2}}}{2-x^2} = 2 - \frac{2-x^2+x^2}{\sqrt{(2-x^2)^3}} \\ &= 2 - \frac{2}{\sqrt{(2-x^2)^3}} \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} & f''(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \geq \frac{2}{\sqrt{(2-x^2)^3}} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \geq \frac{1}{\sqrt{(2-x^2)^3}} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \leq \sqrt{(2-x^2)^3} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \leq (2-x^2)^3 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \leq 2-x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x \in [-1,1] \end{aligned}$$

Da $[-1,1] \subseteq D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, ist f auf dem Intervall $[-1,1]$ konvex und für $-\sqrt{2} \leq x \leq -1$ und $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ konkav.
Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \\ \Leftrightarrow \quad & 4x^2 = \frac{x^2}{2-x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & (2-x^2)4x^2 = x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2(1-4(2-x^2)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2(4x^2-7) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \ \vee \ x = \sqrt{\frac{7}{4}} \ \vee \ x = -\sqrt{\frac{7}{4}} \end{aligned}$$

Alle Nullstellen der 1. Ableitung liegen im Definitionsbereich von f, sind somit Kandidaten für lokale Extrema. Wegen

$$\begin{aligned} f''(0) &= 2 - \frac{2}{\sqrt{8}} > 0 \\ f''\left(\pm\sqrt{\frac{7}{4}}\right) &= 2 - \frac{2}{\sqrt{\left(2-\frac{7}{4}\right)^3}} = 2 - \frac{2}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} < 0 \end{aligned}$$

liegt bei $x = 0$ ein lokales Minimum und bei $x = \sqrt{\frac{7}{4}}$ sowie bei $x = -\sqrt{\frac{7}{4}}$ jeweils ein lokales Maximum vor.

Aufgabe 5 (4+3+4=10 Punkte)

(a) Ermitteln Sie eine Stammfunktion:

$$\int \frac{4x^2 + 14x + 4}{x^3 + 4x^2 + 4x} \, dx$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(b)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2 + x^2}} \, dx$$

(c)

$$\int_1^\infty \frac{x}{\mathrm{e}^x} \, dx$$

Musterlösung:

(a) Partialbruchzerlegung liefert $(A, B, C \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2 + 14x + 4}{x^3 + 4x^2 + 4x} &= \frac{4x^2 + 14x + 4}{x(x^2 + 4x^2 + 4)} = \frac{4x^2 + 14x + 4}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \\
&= \frac{A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx}{x(x+2)^2} = \frac{A(x^2 + 4x + 4) + Bx^2 + 2Bx + Cx}{x(x+2)^2} \\
&= \frac{Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx}{x(x+2)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (4A + 2B + C)x + 4A}{x(x+2)^2}
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned}
4A &= 4 \Rightarrow A = 1 \\
A + B &= 1 + B = 4 \Rightarrow B = 3 \\
4A + 2B + C &= 4 + 6 + C = 14 \Rightarrow C = 4
\end{aligned}$$

Also folgt für das unbestimmte Integral:

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2 + 14x + 4}{x^3 + 4x^2 + 4x} \, dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x+2} + \frac{4}{(x+2)^2} \right) dx \\
&= \log(|x|) + 3 \log|x+2| - \frac{4}{x+2} + c
\end{aligned}$$

(b) Substituiere $z = z(x) := 2 + x^2$. Dann gilt $\frac{dz}{dx} = 2x$ und somit $dx = \frac{dz}{2x}$. Für die Integrationsgrenzen gilt $z(0) = 2$ und $z(1) = 3$. Also folgt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx &= \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{z}}\frac{dz}{2x} = \int_2^3 \frac{dz}{2\sqrt{z}}\\ &= \sqrt{z}\Big|_2^3 = \sqrt{3} - \sqrt{2}\end{aligned}$$

Man kann auch $z = z(x) := \sqrt{2+x^2}$ substituieren. Dann gilt $\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} = \frac{x}{z}$ also $dx = \frac{zdz}{x}$. Für die Integrationsgrenzen gilt $z(0) = \sqrt{2}$ und $z(1) = \sqrt{3}$. Also folgt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{z}\frac{zdz}{x} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 1\,dz\\ = z\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}\end{aligned}$$

(c) Es handelt sich hierbei um ein uneigentliches Integral: Sei $b > 0$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{x}{\mathrm{e}^x}\,dx &= \int_1^b x \cdot \mathrm{e}^{-x}\,dx = -x\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^b + \int_1^b \mathrm{e}^{-x}\,dx\\ &= -(b\mathrm{e}^{-b} - e^{-1}) - \mathrm{e}^x\Big|_1^b = -b\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{-1} - (\mathrm{e}^{-b} - e^{-1})\\ &= -b\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-b} + \frac{2}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{b\to\infty}\left(-b\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-b} + \frac{2}{e}\right) = \frac{2}{\mathrm{e}}$, existiert auch das uneigentliche Integral und hat den Wert $\frac{2}{\mathrm{e}}$.

Aufgabe 6 (4+6=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x^2y - \frac{x}{y} + 3$$

keine stationären Punkte besitzt!

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x^3 + y^3 + xy$$

Musterlösung:

(a) Für den Gradienten gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - \frac{1}{y} \\ x^2 + \frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

Dieser ist gleich dem Nullvektor genau dann, wenn

$$2xy - \frac{1}{y} = 0 \ \wedge \ x^2 + \frac{x}{y^2} = 0$$

Betrachte zunächst die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} & 2xy - \frac{1}{y} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2xy^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2xy^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x = \frac{1}{y^2} \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{1}{2y^2} \end{aligned}$$

Einsetzen in die 2. Gleichung ergibt:

$$\frac{1}{4y^4} + \frac{1}{2y^4} = 0$$

Da $\forall_{y\in\mathbb{R}\backslash\{0\}}\ y^4 > 0$, ist diese Gleichung für kein $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ erfüllt. Somit existieren keine stationären Punkte.

(b) Für den Gradienten gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y \\ 3y^2 + x \end{pmatrix}$$

$$3x^2 + y = 0 \ \wedge \ 3y^2 + x = 0$$

Löse die erste Gleichung nach y auf: $y = -3x^2$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} & 27x^4 + x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(27x^3 + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \ \vee x^3 = -\frac{1}{27} \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \ \vee x = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Im Falle von $x = 0$ ergibt sich $y = 0$, und im Falle von $x = -\frac{1}{3}$ ergibt sich $y = -\frac{1}{3}$. Somit sind die einzigen beiden stationären Punkte $(0,0)$ und $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Für die Hesse-Matrix gilt

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$$

Setze nun die stationären Punkte ein:

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der erste Hauptminor ist 0 und der zweite $\det(D^2 f(0,0)) = -1$. Es liegt weder der Fall vor, daß alle Hauptminoren echt positiv sind, noch, daß der erste echt negativ und der zweite echt positiv ist. Also ist $D^2 f(0,0)$ nicht positiv und nicht negativ definit. Da $\det(D^2 f(0,0)) \neq 0$, liegt auch keine Semidefinitheit vor. Nach dem Kriterium von Sylvester liegt somit Indefinitheit vor. Somit handelt es sich bei $(0,0)$ um einen Sattelpunkt.

$$D^2 f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Der erste Hauptminor ist $-2 < 0$ und der zweite $\det\left(D^2 f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right) = 3 > 0$. Aufgrund des abwechselnden Vorzeichens, beginnend mit $<$, liegt negative Definitheit vor. Somit liegt bei $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ ein lokales Maximum vor.