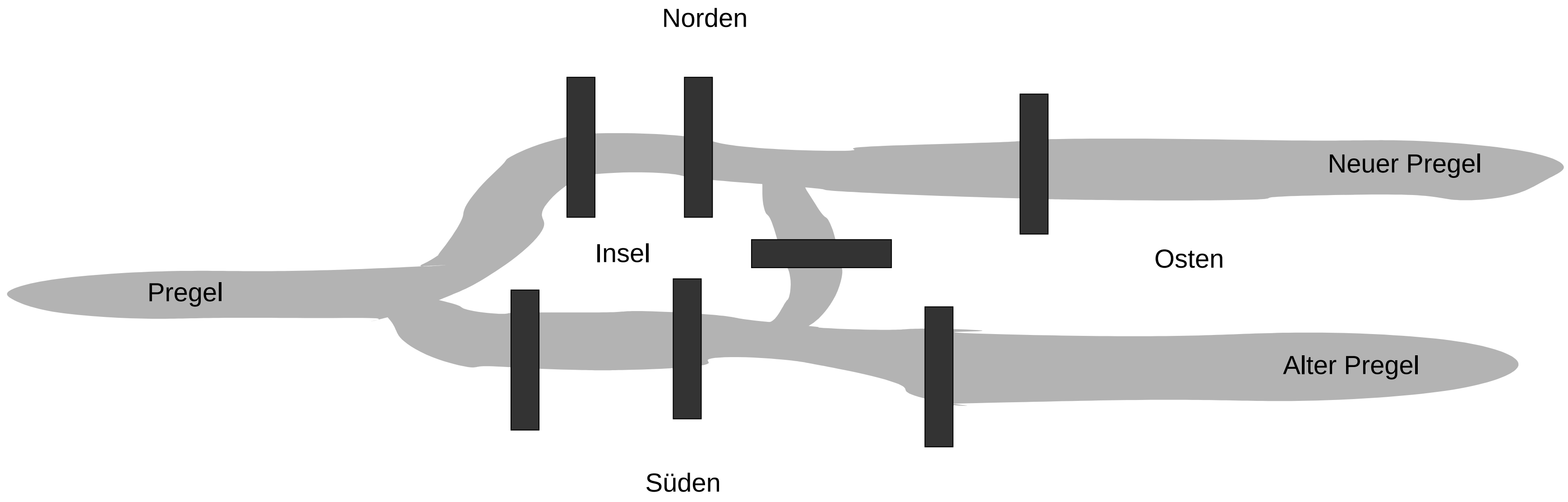
Über Wege und Touren: Graphentheorie als Schnittpunkt von Informatik und Mathematik

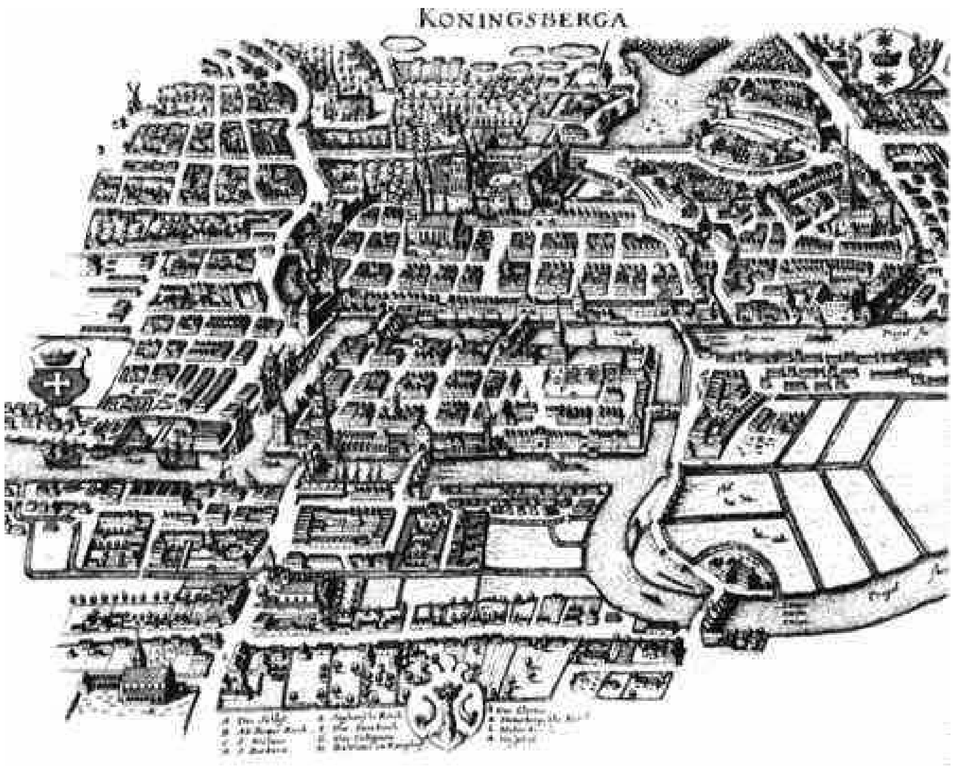
Peter Becker
FH Bonn-Rhein-Sieg
Fachbereich Angewandte Informatik
`peter.becker@fh-bonn-rhein-sieg.de`

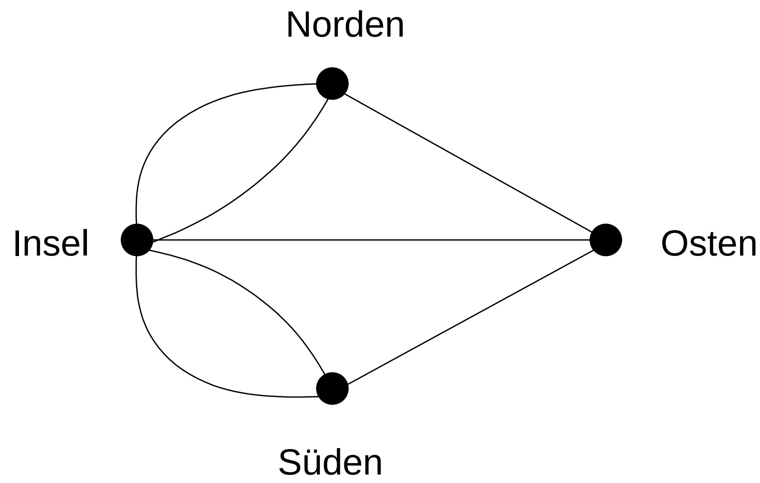
Kurzvorlesung Studientag 15.06.2002

Das Königsberger Brückenproblem



Beispiel 1. [Euler, 1736] Gibt es einen Rundweg durch Königsberg, der jede der sieben Brücken genau einmal überquert?


KONINGSBERGA


Norden
Insel
Osten
Süden

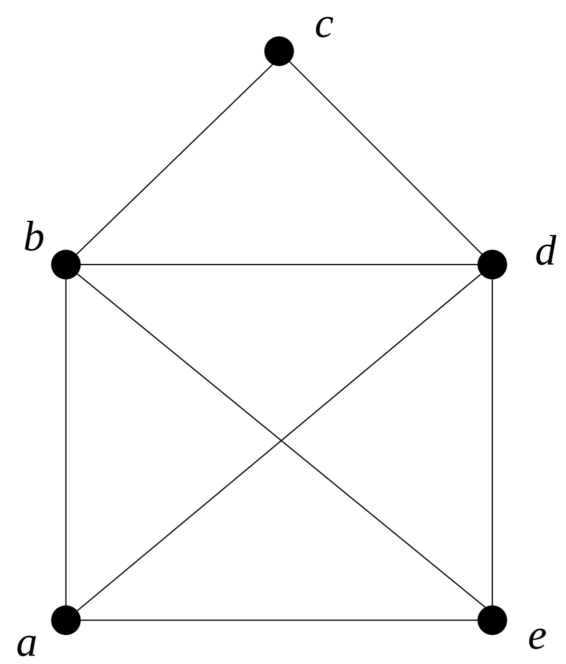
Definition 1. Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei

- V eine beliebige (endliche) Menge ist und
- E eine Menge zweielementiger Teilmengen von V, also

$$E \subseteq \{\{v, w\} | v, w \in V, v \neq w\}$$

- Die Elemente von V heißen *Knoten* und
- die Elemente von E *Kanten*.

Beispiel 2.



$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d, e\} \\ E &= \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \\ &\quad \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}\} \end{aligned}$$

Knotengrad

Definition 2. Der *Grad* $\deg(v)$ eines Knotens $v \in V$ ist die Zahl der mit v verbundenen Kanten.

Lemma 1. [Handschlaglemma] *Für jeden Graphen* $G = (V, E)$ *gilt:*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Korollar 2. *Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist gerade.*

Wege und Kreise

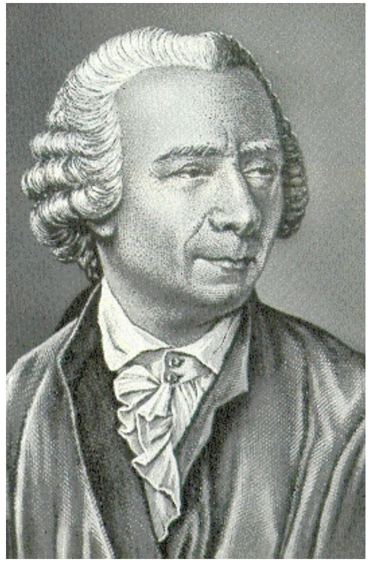
Definition 3. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Folge $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ von Knoten mit $e_i := \{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ heißt *Kantenzug*.
- Ein Kantenzug, bei dem die e_i alle verschieden sind, heißt *Weg*.
- Ein Weg, für den $v_0 = v_n$ gilt, heißt *Kreis*.

Eulerweg, Eulerkreis

Definition 4. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Ein Weg, der jede Kante von G genau einmal enthält, heißt *eulerscher Weg* von G.
- Ein Kreis, der jede Kante von G genau einmal enthält, heißt *eulerscher Kreis* von G.
- G heißt *eulersch* gdw. G einen eulerschen Kreis enthält.



Leonard Euler

Charakterisierung von eulerschen Graphen

Satz 3. [Euler 1736] *Es sei* $G = (V, E)$ *ein Graph.*

G *hat einen eulerschen Weg gdw.*

- G *bis auf isolierte Knoten zusammenhängend ist und*
- *die Zahl* u *der Knoten mit ungeradem Grad* 0 *oder* 2 *ist.*

Die Existenz eines eulerschen Kreises ist äquivalent mit $u = 0$*.*

Beweis.

1. “$\Longrightarrow$”: G habe einen eulerschen Kreis $K = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_0)$.

- Dann ist G bis auf isolierte Knoten zusammenhängend und
- tritt der Knoten v in der Folge $v_0, v_1, \dots, v_{m-1}$ genau t-mal auf, so gilt $deg(v) = 2t$, d.h. v hat geraden Grad.

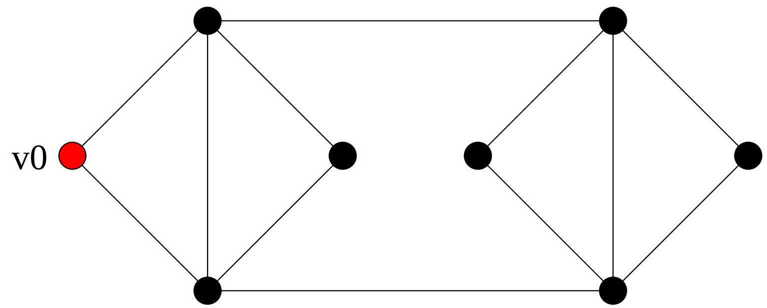
2. “$\Longleftarrow$”: Beweis durch vollständige Induktion über die Zahl der Knoten.

Induktionsanfang: Der Graph $G = (\{v_0\}, \{\})$ ist eulersch, denn (v_0) ist ein eulerscher Kreis.

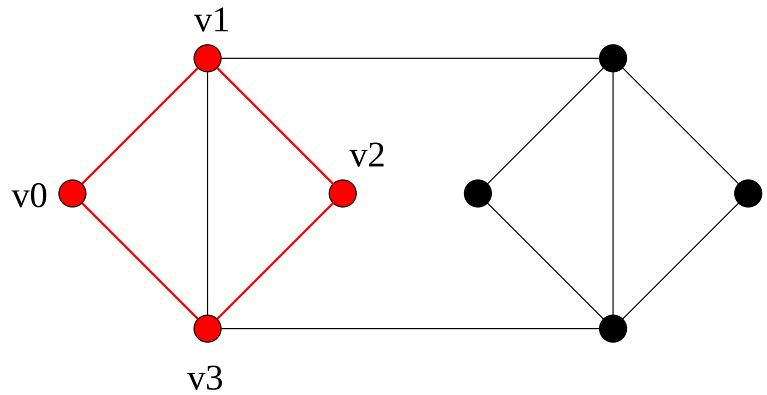
Induktionsannahme: Für Graphen mit höchsten n Knoten gelte die Behauptung.

Induktionsschritt: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $n + 1$ Knoten und und alle Knoten haben geraden Grad.

Wähle einen beliebigen Knoten $v_0 \in V$.



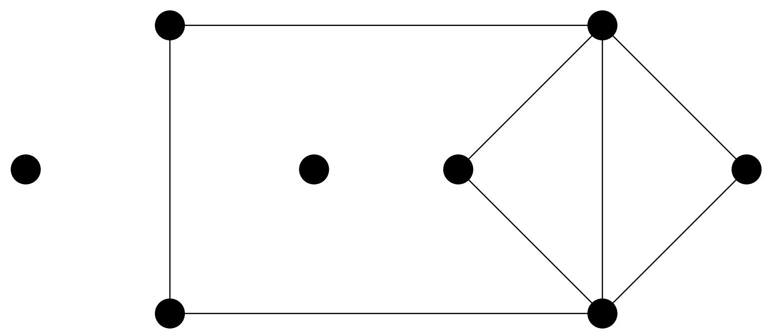
Wähle solange dies möglich ist Knoten $v_1, v_2, \ldots$, so daß $(v_0, \ldots, v_i)$ jeweils ein Weg in G ist.



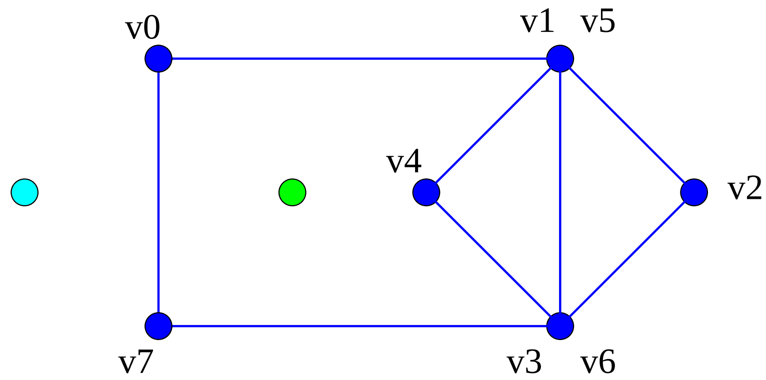
Unter den gegebenen Voraussetzungen entsteht so automatisch ein Kreis K. Sei E_k die Menge der Kanten in K.

Wenn K alle Kanten aus E enthält, so ist K ein Eulerkreis.

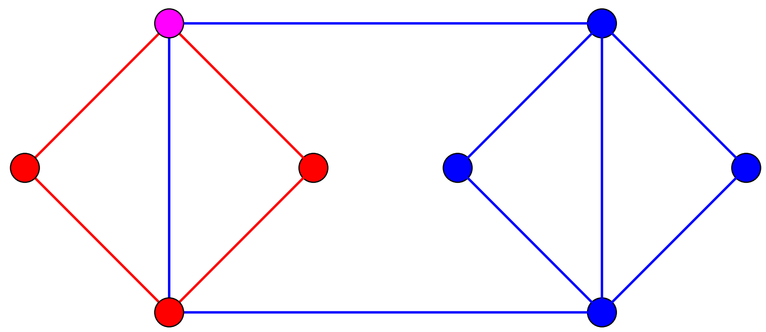
Ansonsten bildet man den Restgraphen $G' = (V, E \setminus E_K)$.



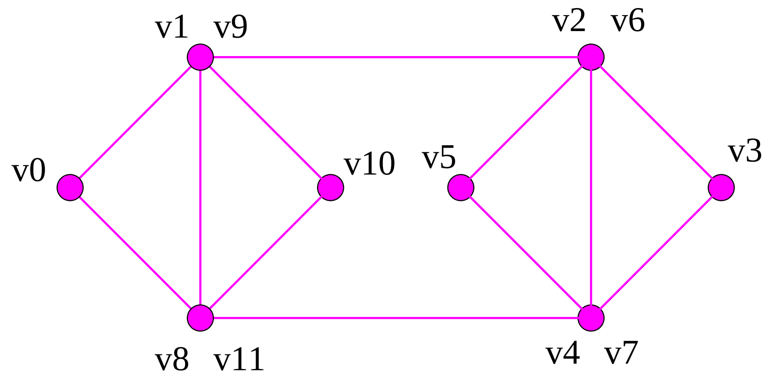
Für die Komponenten des Restgraphen gilt die Induktionsannahme.



Nun fügt man die Kreise an Knoten zusammen, die in K und einer Komponente des Restgraphen enthalten sind.



Man läuft entlang K bis zu solch einem Knoten, dann entlang des Kreises des Restgraphen und anschließend wieder entlang K.



□

Berechnung eines Eulerweges

Algorithmus 1. [Hierholzer 1873]

1. Wähle einen beliebigen Knoten $v_0 \in V$.

   Wähle solange dies möglich ist Knoten $v_1, v_2, \ldots$, so daß $(v_0, \ldots, v_i)$ jeweils ein Weg in G ist.

   Unter den gegebenen Voraussetzungen entsteht so automatisch ein Kreis K. Setze $w' := v_0$.

2. Prüfe, ob K ein eulerscher Kreis ist. Wenn ja, dann STOP, ansonsten gehe zu 3.

3. Setze $K' := K$.

Laufe ab w' entlang K' und wähle einen in K' enthaltenen Knoten w, der mit einer nicht in K' enthaltenen Kante inzident ist.

Konstruiere wie unter 1. ausgehend von w einen Kreis K'', der keine Kanten von K' enthält.

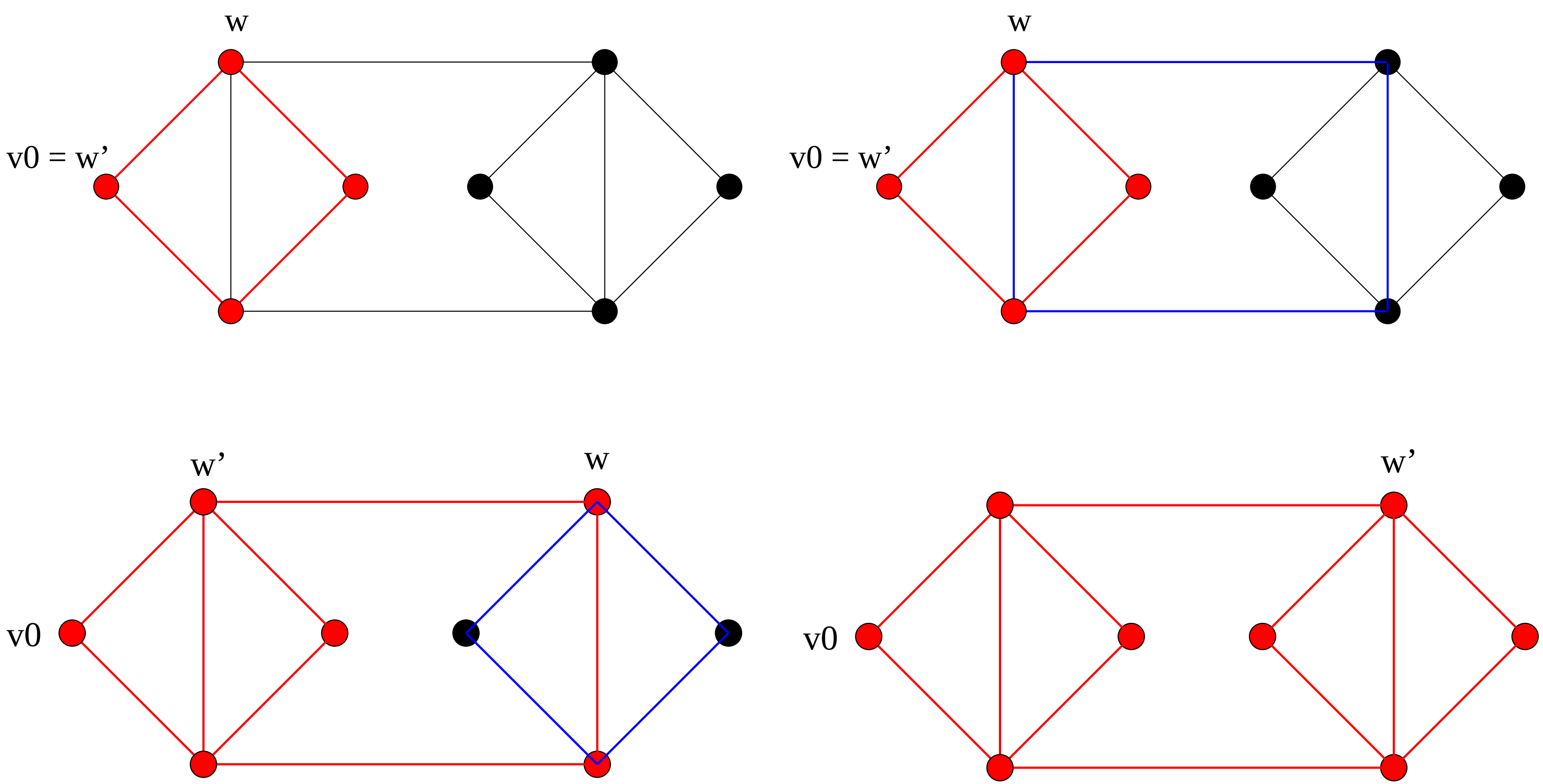
Füge K'' in den Kreis K' an der Stelle w ein. Setze $w' := w$.
Gehe zu 2.

Satz 4. *Mit dem Algorithmus von Hierholzer kann in Zeit* $O(|E|)$ *ein eulerscher Kreis berechnet werden.*

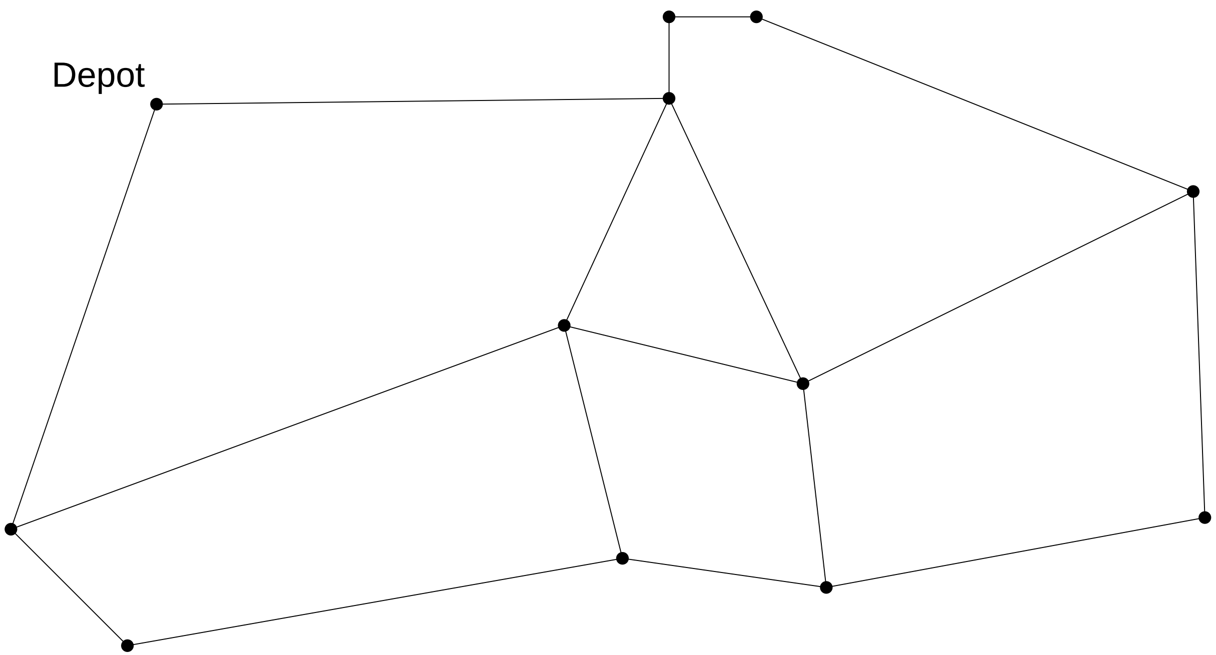
Beweis. Jede Kante wird höchstens zweimal durchlaufen:

1. Bei der Konstruktion von K bzw. K''.

2. Bei der Suche nach einem w. □

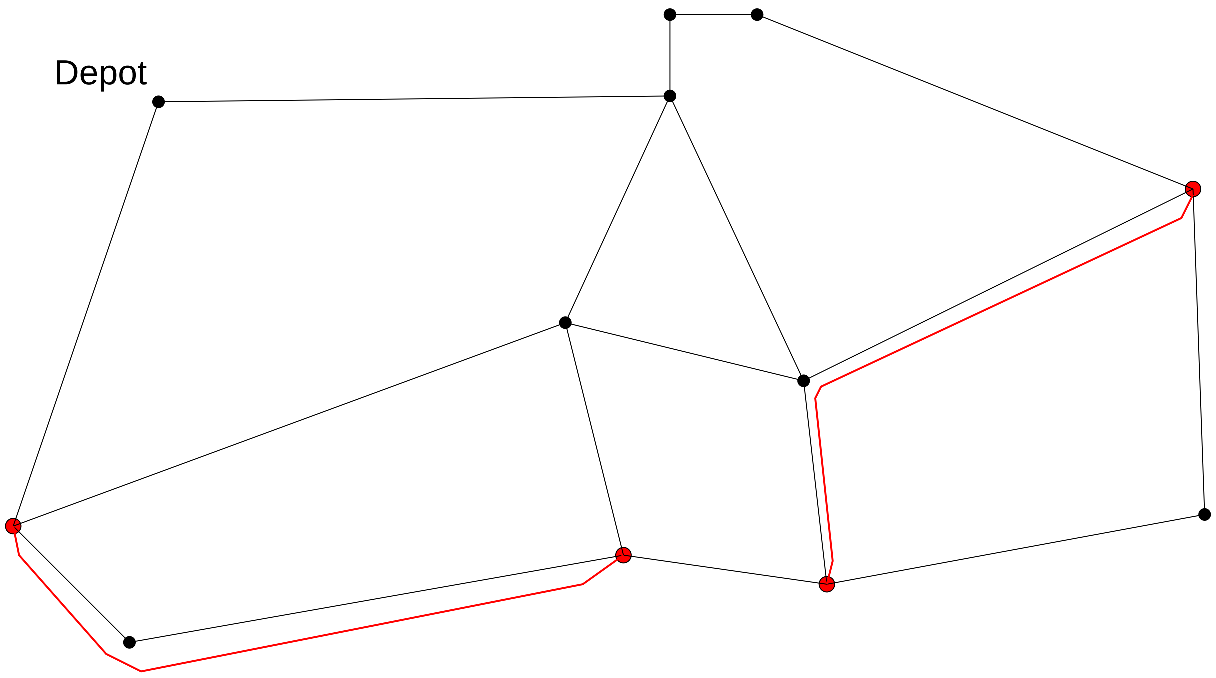

w
v0 = w'
w
v0 = w'
w'
w
v0
w'
v0

Chinesisches Briefträgerproblem



Man finde für dieses Straßennetz eine möglichst kurze Tour zur Zustellung der Post.

Lösung: Man macht den Graphen mit möglichst kurzen zusätzlichen Kanten eulersch.



Hamiltonsche Graphen

Definition 5. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

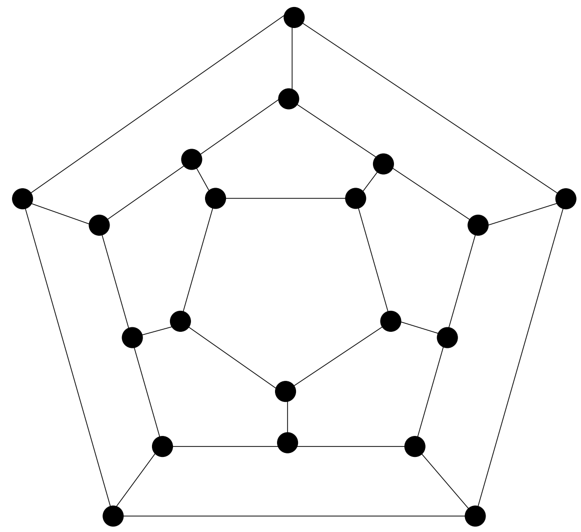
- Ein Weg, der jeden Knoten von G genau einmal enthält, heißt *hamiltonscher Weg*.
- Ein Kreis, der jeden Knoten von G genau einmal enthält, heißt *hamiltonscher Kreis*.
- G heißt *hamiltonsch* gdw. G einen hamiltonschen Kreis enthält.

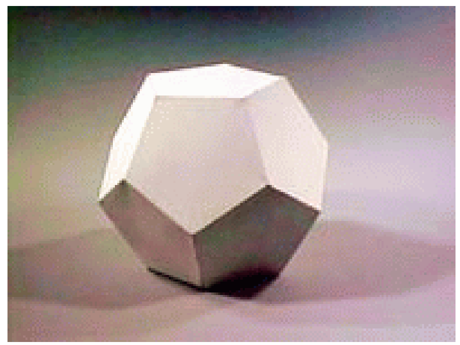
Beispiel 3.

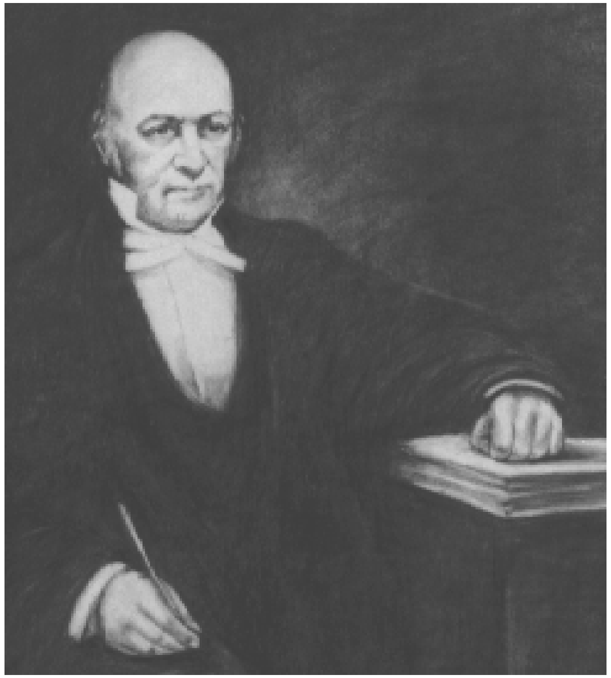
- Die Bezeichnung “hamiltonsch” geht auf Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) zurück, der 1859 das Spiel “around the world” erfand.

- Die Punkte eines Dodekaeders stellten Städte dar.

- Die Aufgabe des Spiels bestand darin, entlang der Kanten des Dodekaeders eine Rundreise zu unternehmen, bei der man jede Stadt genau einmal besucht.







Sir William Rowan Hamilton

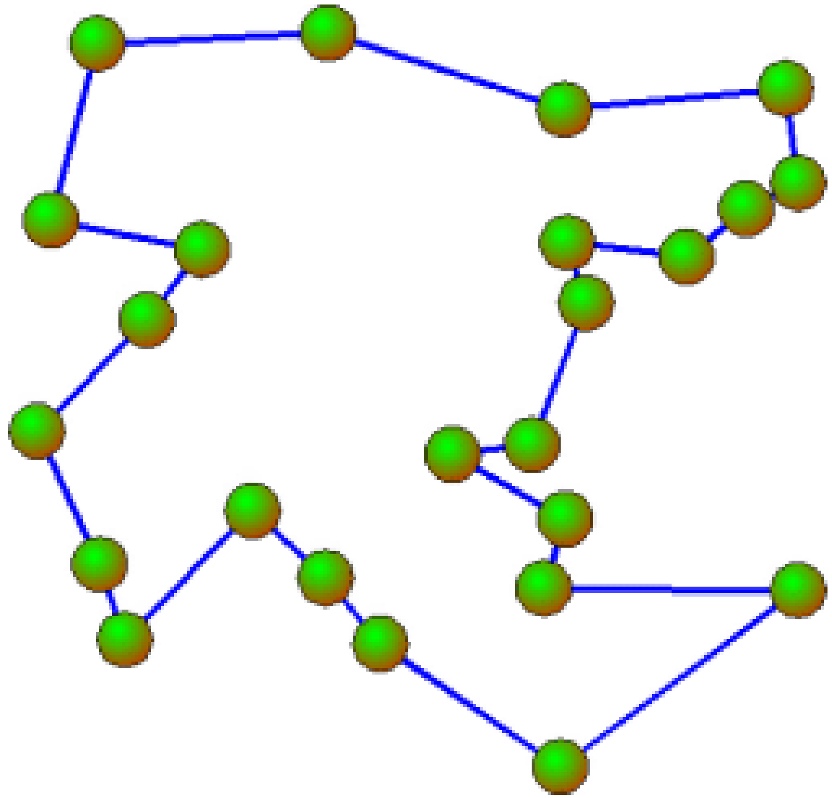
Around the World

Problem des Handlungsreisenden (TSP)

In einem vollständigen Graphen, dessen Kanten Längen haben, ist die kürzeste Rundreise gefragt.

Im Gegensatz zur Konstruktion eines hamiltonschen Kreises besteht hier die Schwierigkeit nicht im Finden einer Rundreise.

Es gibt $\frac{1}{2}(n-1)!$ verschiedene Rundreisen.



Bemerkungen:

- Obwohl die Eigenschaften hamiltonsch und eulersch sehr ähnlich erscheinen, ist kein effizienter Algorithmus zur Konstruktion von hamiltonschen Kreisen bekannt.
- Im schlimmsten Fall müssen alle Möglichkeiten durch *Enumeration* ausprobiert werden.
- Man geht sogar davon aus, daß es keine bessere Lösung gibt, denn dieses Problem ist in einem präzisierbarem Sinne schwierig.
- Es gehört zur Klasse der $\mathcal{NP}$*-vollständigen Probleme*: Existiert ein effizientes Berechnungsverfahren für ein Problem dieser Klasse, so hätte man effiziente Berechnungsverfahren für alle Probleme dieser Klasse.

Zusammenfassung

- Graphen zur Modellierung von realen Problemstellungen
- Sie modellieren zweistellige Beziehungen zwischen den Elementen einer Menge.
- Charakterisierung von eulerschen Graphen bzw. Kreisen
- Algorithmus von Hierholzer: Effizientes Berechnungsverfahren zur Konstruktion eulerscher Kreise
- Leichte Änderungen in der Problemstellung konnen dazu führe, daß keine effiziente Berechnung mehr möglich ist.