Alphabet der Prädikatenlogik

Das Alphabet der Prädikatenlogik besteht aus

- Individuenvariablen
  Dafür verwenden wir kleine Buchstaben vom Ende des deutschen Alphabets, auch indiziert, z. B. $x, y, z, x_1, y_2, \ldots$.
- Individuenkonstanten
  Dafür verwenden wir kleine Buchstaben vom Anfang des deutschen Alphabets oder auch Namen oder Objektbezeichner, z. B.: $a, b, c, \texttt{martin}, \texttt{klaus}, \texttt{object4711}, \ldots$
- k-stelligen Funktionssymbolen
  mit $k \in \mathbb{N}$. Hierzu nutzen wir kleine Buchstaben aus der Mitte des deutschen Alphabets, auch indiziert, z. B. $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$

- *k*-stelligen Prädikatensymbolen
  mit $k \in \mathbb{N}_0$. Hierzu nutzen wir große Buchstaben oder großgeschriebene Wörter, z. B. $P, Q, R, \texttt{Informatiker}, \texttt{Mann}, \ldots$
- logischen Junktoren
  $\neg, \wedge, \vee$
- Quantoren
  $\forall$ ist der Allquantor, $\exists$ der Existenzquantor.
- Klammersymbolen
  (und)
- Bezeichner für Wahrheitswerte
  0 und 1

Prädikatenlogische Terme

Definition 3.16

Die Menge der prädikatenlogischen Terme ist gegeben durch:

(i) Jede Individuenvariable und jede Individuenkonstante ist ein prädikatenlogischer Term.

(ii) Sind $t_1, \ldots, t_n$ prädikatenlogische Terme und ist f ein n-stelliges Funktionssymbol, dann ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein prädikatenlogischer Term.

(iii) Genau die mit den Regeln (i) und (ii) bildbaren Zeichenketten sind prädikatenlogische Terme.

Beispiel 3.17

Die Individuenvariable x und die Individuenkonstante b sind Terme ebenso wie $f(x, b)$, $f(x, f(b, x))$ und $g(x, f(b, b), h(x, y, a, z))$.

Atomare Formeln

Definition 3.18

Die Menge der atomaren Formeln ist gegeben durch:

(i) Sind $t_1, \ldots, t_n$ prädikatenlogische Terme und ist P ein n-stelliges Prädikatensymbol, dann ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine atomare Formel.

(ii) Genau die Zeichenketten, die mit Regel (i) gebildet werden können, sind atomare Formeln.

Beispiel 3.19

Die Zeichenketten $P(a, b)$, $Q(a, g(x, y, z, x), f(z))$, $R(x, y, h(h(x, a), z))$ und $S(h(x, y), h(y, x))$ sind atomare Formeln.

Prädikatenlogische Formeln

Definition 3.20

Die Menge der prädikatenlogischen Formeln ist gegeben durch:

(i) Jede atomare Formel ist eine prädikatenlogische Formel.

(ii) Sind α und β prädikatenlogische Formeln, dann auch $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$.

(iii) Ist α eine prädikatenlogische Formel und x eine Individuenvariable, dann sind auch $(\forall x\, \alpha)$ und $(\exists x\, \alpha)$ prädikatenlogische Formeln.

(iv) Genau die Zeichenketten, die mit den Regeln (i) bis (iii) gebildet werden können, sind prädikatenlogische Formeln.

Beispiel 3.21

Die Zeichenketten

$$(\forall x \neg P(x))$$
$$(\forall x (Q(a, f(a, b)) \wedge R(x, a, c)))$$
$$(\forall x (\exists y\, R(x, y, z)))$$
$$(\forall x (\forall y\, Q(f(x, y), f(y, x))))$$

sind prädikatenlogische Formeln.

Geschlossene Formeln

- Variablen, die sich im Wirkungsbereich eines Quantors befinden, heißen gebunden, nicht gebundene Variablen heißen frei.
- So sind in der Formel

$$(\forall x (\exists y\, P(x, y, z)))$$

  die Variablen x, y gebunden, z ist frei.
- Eine Formel, die keine freien Variablen enthält, ist geschlossen. Die Formel

$$(\forall x (\forall y\, Q(f(x, y), f(y, x))))$$

  ist ein Beispiel für eine geschlossene Formel.

Vereinbarung: Eine Formel, die nicht Teil einer größeren Formel ist, muss immer geschlossen sein.

Weitere Vereinbarungen

- Gebundene Variablen können beliebig umbenannt werden, wenn dabei keine Kollision mit anderen Variablen auftritt.
- So kann in der Formel

$$(\exists x\, P(f(x,y),z))$$

  die Variable x in q umbenannt werden: $(\exists q\, P(f(q,y),z))$.
- Wir führen wie in der Aussagenlogik $\to$ und $\leftrightarrow$ ein.
- Wir können Klammern auch weglassen, sofern Bindungen von Quantoren und Junktoren eindeutig sind.
- Die Priorität der Junktoren untereinander sei wie in der Aussagenlogik. Quantoren haben die niedrigste Priorität.

Prädikatenlogische Belegung

Um die Bedeutung einer prädikatenlogischen Formel zu bestimmen, müssen wir wie in der Aussagenlogik eine Belegung vornehmen.

In der Prädikatenlogik besteht solch eine Belegung $\mathcal{I}$ aus:

- Einer Grundmenge U auch Universum genannt. Dies ist die Menge der Dinge, über die wir Aussagen treffen wollen.
- Jeder Individuenkonstante wird ein Element aus dem Universum U zugeordnet.
- Jedem k-stelligen Funktionssymbol wird eine k-stellige Funktion über dem Universum U zugeordnet.
- Jedem k-stelligen Prädikatensymbol wird eine k-stellige Relation über dem Universum U zugeordnet.

Beispiel 3.22

Universum:

$U = \{$  ,  ,  ,  $\}$

Unsere Individuenkonstanten seien: `helga`, `martin`, `klaus` und `jupp`.
Zuordnung für die Individuenkonstanten:

$\mathcal{I}(\texttt{helga}) =$  $\mathcal{I}(\texttt{martin}) =$ 

$\mathcal{I}(\texttt{klaus}) =$  $\mathcal{I}(\texttt{jupp}) =$ 

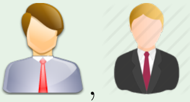
Wir nutzen im Folgenden keine Funktionssymbole.

Fortsetzung Beispiel.

Unsere Prädikatensymbole seien `Informatiker` und `Programmieren`, jeweils einstellig.

Einstellige Relationen sind einfache Mengen. Wir müssen daher die beiden Prädikatensymbole `Informatiker` und `Programmieren` mit Mengen belegen.

Es sei

$\mathcal{I}(\texttt{Informatiker}) = \{$  $\}$

$\mathcal{I}(\texttt{Programmieren}) = \{$  $\}$

Fortsetzung Beispiel.

Die folgenden Zeichenketten sind dann prädikatenlogische Formeln:

$$(\texttt{Informatiker}(\texttt{martin}) \land \texttt{Informatiker}(\texttt{klaus}))$$
$$(\forall x\,(\texttt{Informatiker}(x) \rightarrow \texttt{Programmieren}(x)))$$

Sie entsprechen den Aussagen:

- Martin und Klaus sind Informatiker.
- Jeder Informatiker kann programmieren.

Sind diese Formeln bzw. Aussagen nun wahr oder falsch?

Semantik Prädikatenlogischer Formeln

Auf Basis einer Belegung $\mathcal{I}$ mit Grundmenge U geschieht die Berechnung $\mathcal{I}^*$ des Wahrheitswertes einer prädikatenlogischen Formel wie folgt:

(i) Für einen prädikatenlogischen Term $f(t_1, \ldots, t_n)$ gilt

$$\mathcal{I}^*(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathcal{I}(f)(\mathcal{I}^*(t_1), \ldots, \mathcal{I}^*(t_n)).$$

Die Belegung $\mathcal{I}(f)$ des Funktionssymbols f wird auf das Ergebnis der Interpretationen der Terme $t_1, \ldots, t_n$ angewendet.

Man beachte: Die Interpretation eines Terms liefert keinen Wahrheitswert, sondern ein Element aus U.

(ii) Für eine atomare Formel $P(t_1, \ldots, t_n)$ gilt

$$\mathcal{I}^*(P(t_1, \ldots, t_n)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\mathcal{I}^*(t_1), \ldots, \mathcal{I}^*(t_n)) \in \mathcal{I}(P) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch die Interpretation der Terme $t_1, \ldots, t_n$ entsteht ein n-Tupel. Wenn dieses n-Tupel Element der Relation ist, die dem Prädikatensymbol P zugeordnet wurde, dann ist die atomare Formel wahr, ansonsten falsch.

(iii) Interpretation zusammengesetzter Formeln: Seien α, β prädikatenlogische Formeln, dann gilt:

(1) $\mathcal{I}^*(\neg\alpha) = 1 - \mathcal{I}^*(\alpha)$
(2) $\mathcal{I}^*(\alpha \wedge \beta) = \min\{\mathcal{I}^*(\alpha), \mathcal{I}^*(\beta)\}$
(3) $\mathcal{I}^*(\alpha \vee \beta) = \max\{\mathcal{I}^*(\alpha), \mathcal{I}^*(\beta)\}$

(4)

$$\mathcal{I}^*(\exists x\, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{falls ein } a \in U \text{ existiert mit } \mathcal{I}^*(\alpha[x/a]) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$= \max_{a \in U} \mathcal{I}^*(\alpha[x/a])$$

(5)

$$\mathcal{I}^*(\forall x\, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } a \in U \text{ gilt: } \mathcal{I}^*(\alpha[x/a]) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$= \min_{a \in U} \mathcal{I}^*(\alpha[x/a])$$

Dabei bedeutet $\alpha[x/a]$, dass im Wirkungsbereich des Quantors innerhalb der Formel α jedes Vorkommen von x durch (eine Individuenkonstante für) a ersetzt wird.

Beispiel 3.23

Wir überprüfen, ob die Formeln aus Beispiel 3.22 mit der dort definierten Belegung wahr sind.

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{I}^*(\texttt{Informatiker}(\texttt{martin}) \wedge \texttt{Informatiker}(\texttt{klaus})) \\
= \; & \min\{\mathcal{I}^*(\texttt{Informatiker}(\texttt{martin})), \mathcal{I}^*(\texttt{Informatiker}(\texttt{klaus}))\} \\
= \; & \min\{\mathcal{I}^*(\texttt{martin}) \in \mathcal{I}(\texttt{Informatiker}), \mathcal{I}^*(\texttt{klaus}) \in \mathcal{I}(\texttt{Informatiker}) \\
= \; & \min\{\mathcal{I}(\texttt{martin}) \in \mathcal{I}(\texttt{Informatiker}), \mathcal{I}(\texttt{klaus}) \in \mathcal{I}(\texttt{Informatiker})\}
\end{aligned}
$$

$=$ min{  $\in \mathcal{I}(\texttt{Informatiker})$,  $\in \mathcal{I}(\texttt{Informatiker})\}$

$$= \min\{1, 1\} = 1$$

Fortsetzung Beispiel.

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{I}^*(\forall x\,(\mathtt{Informatiker}(x) \rightarrow \mathtt{Programmieren}(x))) \\
= \;& \min\{\mathcal{I}^*(\mathtt{Informatiker}(\mathtt{helga}) \rightarrow \mathtt{Programmieren}(\mathtt{helga})), \\
& \quad \mathcal{I}^*(\mathtt{Informatiker}(\mathtt{martin}) \rightarrow \mathtt{Programmieren}(\mathtt{martin})), \\
& \quad \mathcal{I}^*(\mathtt{Informatiker}(\mathtt{klaus}) \rightarrow \mathtt{Programmieren}(\mathtt{klaus})), \\
& \quad \mathcal{I}^*(\mathtt{Informatiker}(\mathtt{jupp}) \rightarrow \mathtt{Programmieren}(\mathtt{jupp}))\} \\
= \;& \min\{\max\{1 - \mathcal{I}^*(\mathtt{Informatiker}(\mathtt{helga})), \mathcal{I}^*(\mathtt{Programmieren}(\mathtt{helga}) \\
& \quad \max\{1 - \mathcal{I}^*(\mathtt{Informatiker}(\mathtt{martin})), \mathcal{I}^*(\mathtt{Programmieren}(\mathtt{marti} \\
& \quad \max\{1 - \mathcal{I}^*(\mathtt{Informatiker}(\mathtt{klaus})), \mathcal{I}^*(\mathtt{Programmieren}(\mathtt{klaus}) \\
& \quad \max\{1 - \mathcal{I}^*(\mathtt{Informatiker}(\mathtt{jupp})), \mathcal{I}^*(\mathtt{Programmieren}(\mathtt{jupp}))\} \\
= \;& \min\{\max\{1-0, 0\}, \max\{1-1, 1\}, \max\{1-1, 1\}, \max\{1-0, 1\}\} \\
= \;& \min\{1, 1, 1, 1\} = 1
\end{aligned}
$$

Übertragung von Begriffen aus der Aussagenlogik

Wir können nun die meisten Begriffe aus der Aussagenlogik auf die Prädikatenlogik übertragen.

- Ein (prädikatenlogisches) Modell ist eine Belegung, die eine Formel bzw. eine Formelmenge wahr macht.
- Eine Formel α bzw. eine Formelmenge $\mathcal{F}$ heißt erfüllbar, wenn es ein Modell für α bzw. $\mathcal{F}$ gibt.
- Eine Formel, die für jede Belegung wahr ist, ist eine Tautologie.
- Logische Folgerung: Wenn jedes Modell für eine Formelmenge $\mathcal{F}$ auch eine Modell für α ist, dann gilt

$$\mathcal{F} \models \alpha$$

- Auch die Begriffe der Implikation ($\Rightarrow$) und Äquivalenz ($\Leftrightarrow$) werden wie in der Aussagenlogik definiert.

Logische Äquivalenzen

- Wie in der Aussagenlogik sind zwei Formel α und β logisch äquivalent ($\alpha \equiv \beta$), wenn für alle Belegungen $\mathcal{I}^*(\alpha) = \mathcal{I}^*(\beta)$ gilt.
- Alle logischen Äquivalenzen der Aussagenlogik gelten auch in der Prädikatenlogik (siehe Satz 2.24).

Satz 3.24

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x\, \alpha) &\equiv \exists x\, \neg\alpha \\
\neg(\exists x\, \alpha) &\equiv \forall x\, \neg\alpha \\
(\forall x\, \alpha) \wedge (\forall x\, \beta) &\equiv \forall x\, (\alpha \wedge \beta) \\
(\exists x\, \alpha) \vee (\exists x\, \beta) &\equiv \exists x\, (\alpha \vee \beta)
\end{aligned}$$

Fortsetzung Satz.

$$
\begin{aligned}
\forall x \forall y\, \alpha &\equiv \forall y \forall x\, \alpha \\
\exists x \exists y\, \alpha &\equiv \exists y \exists x\, \alpha \\
\forall x\, \alpha &\equiv \forall y\, \alpha[x/y] \\
\exists x\, \alpha &\equiv \exists y\, \alpha[x/y]
\end{aligned}
$$

Für die Ersetzungen muss y eine Variable sein, die im Wirkungsbereich der Quantoren nicht verwendet wird.

Achtung:

$$
\begin{aligned}
(\forall x\, \alpha) \vee (\forall x\, \beta) &\not\equiv \forall x\, (\alpha \vee \beta) \\
(\exists x\, \alpha) \wedge (\exists x\, \beta) &\not\equiv \exists x\, (\alpha \wedge \beta) \\
\exists x \forall y\, \alpha &\not\equiv \forall y \exists x\, \alpha
\end{aligned}
$$

Pragmatische Verwendung der Prädikatenlogik als Sprache

- Wir werden ab jetzt mathematische Sachverhalte sehr oft in prädikatenlogischer Form beschreiben.
- Um die Lesbarkeit zu vereinfachen, verwenden wir die Sprache der Prädikatenlogik pragmatisch.
- Eingeführte Notationen werden direkt verwendet (also ohne Prädikate zu definieren). Beispiel:

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

- Zur besseren Lesbarkeit trennt : Quantor und Variable vom Rest der Formel.
- $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ statt $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$

- Einschränkende Bedingungen zu Mengen oft direkt bei den Quantoren.
  Beispiel: Die Aussage „Alle natürlichen Zahlen sind positiv."

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$$

  statt

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 0$$

- Generell beim Allquantor:

$$\forall x \in A : P(x) \quad \text{steht für} \quad \forall x : x \in A \Rightarrow P(x)$$

- Beim Existenzquantor:

$$\exists x \in A : P(x) \quad \text{steht für} \quad \exists x : x \in A \wedge P(x)$$

- Weitere Informationen ergeben sich oft aus dem Kontext.

Definition neuer Begriffe

Es sei α ein neuer Begriff oder neues Symbol das wir definieren wollen und β eine prädikatenlogische Formel.

Für die Definition von α nutzen wir die Schreibweise

$$\alpha :\Leftrightarrow \beta$$

Semantik: α liegt genau dann vor, wenn die Aussage β wahr ist.

Beispiel: Wir könnten so den Begriff Teilmenge bzw. das Symbol $\subseteq$ definieren durch:

$$A \subseteq B \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

Beispiel 3.25

Die wichtigste Definition der Mathematik des 2. Semesters:

$a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert einer Folge (a_n) :⇔

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

- Aus dem Kontext: $\epsilon \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.
- $-$ entspricht einer zweistelligen Funktion.
- $|\;|$ entspricht einer einstelligen Funktion.
- $<$ entspricht einem zweistelligen Prädikat.

Zusammenfassung

- Kartesisches Produkt $A \times B$
- Relation $R \subseteq A \times B$
- Funktion als spezielle Relation (total, rechtseindeutig)
- Prädikatenlogik als Sprache: Einführung von Quantoren und Variablen
- prädikatenlogische Belegung: Universum als Grundmenge, Prädikate als Relationen über dem Universum
- prädikatenlogische Interpretation: $\forall x$ entspricht einer Minimierung über dem Universum, $\exists x$ einer Maximierung.
- pragmatischer Umgang mit der Sprache in der Praxis