Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Mathematische Grundlagen (2. Musterklausur)

Klausur Wintersemester 2015/16

16. März 2015

Name: **Vorname:**

Matrikelnr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreicht							

Hinweise:

- Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sie müssen Ihre Antworten begründen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) $(p \to q) \to r \equiv (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

(b) Die Menge $\mathcal{F} = \{r \to q, p \to r, q \to p, \neg p\}$ ist erfüllbar.

(c) $p \to (1 \vee p)$ ist eine Tautologie.

(d) $\{r \vee p \vee q, \neg q \vee p \vee r, \neg p\} \models r$

Aufgabe 2 (4+4+2=10 Punkte)

Inspektor Columbo muss einen Einbruch aufklären. Er weiß:

1. Hans, Klaus oder Jupp haben den Einbruch begangen.
2. Jupp arbeitet immer zusammen mit Klaus und Hans.
3. Wenn Hans nicht dabei war, war auch Klaus nicht am Einbruch beteiligt.
4. Mindestens einer der drei war nicht an dem Einbruch beteiligt.

(a) Formulieren Sie die Aussagen 1. bis 4. in Aussagenlogik und stellen Sie die zugehörigen Klauselmengen auf.

(b) Zeigen Sie mittels Resolution, dass Hans ein Täter ist.

(c) War Jupp am Einbruch beteiligt? War Klaus am Einbruch beteiligt?

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

(b) Die Menge M ist durch die folgenden Regeln definiert:

(i) $7 \in M$

(ii) Gilt $x \in M$, dann gilt auch $3x+1 \in M$ und $7x \in M$.

(iii) M enthält genau die Elemente, die durch die Regeln (i) und (ii) gebildet werden können.

Zeigen Sie: $\forall x \in M \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k+1$

Aufgabe 4 (4+3+3=10 Punkte)

Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5)\} \subseteq A \times A$.

(a) Geben Sie R^+ und R^* an.

(b) Ist R^* eine partielle Ordnung? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Geben Sie eine Äquivalenzrelation auf A mit genau zwei Äquivalenzklassen an.

Aufgabe 5 (5+5=10 Punkte)

(a) Sei $f : M \to N$, $B_1, B_2 \subseteq N$. Zeigen Sie:

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{für } x \geq 0 \\ x - 3 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 6 (5+5=10 Punkte)

Zeigen Sie:

(a)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

(b) Unter je fünf Punkten, die in einem Kreis mit Radius $r = 1$ liegen, gibt es stets zwei, die einen Abstand $\leq \sqrt{2}$ haben.